Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Vorlesungsskript

Analysis III

Patrick Dondl

Wintersemester 2024/25

Inhaltsverzeichnis

Motivation: Maß und Integral

Wir wollen eine Funktion
$$m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$$
finden, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) Es gilt $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $m([a, b]) = m((a, b)) = b - a$.

(ii) Sind $E, F \subseteq \mathbb{R}$ mit $E \subseteq F$, so ist $m(E) \leq m(F)$.

(iii) Translationseigenschaft: sind $E \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $m(E) = m(E + x)$ (wobei $E + x := \{x + y \mid y \in E\}$ ist).

(iv) Additivität: sind $E_j \subseteq \mathbb{R}$ für $j \in \mathbb{N}$ disjunkte Mengen (d.h. $E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$), so soll gelten:
$$m\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$$

Das Problem ist, dass es eine solche Funktion nicht gibt! Stattdessen wollen wir einen bestmöglichen Ersatz für diese Funktion konstruieren. Dafür konstruieren wir zunächst eine nicht-messbare Menge (nach Vitali). Wir betrachten die Restklassen von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (bezüglich der Addition), also für $x \in \mathbb{R}$ die Menge $x+\mathbb{Q}$. Diese Restklassen partitionieren $\mathbb{R}$, d.h. insbesondere gilt für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y-x \in \mathbb{Q}$ sofort auch $x+\mathbb{Q} = y+\mathbb{Q}$. Andererseits folgt aus $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y-x \notin \mathbb{Q}$ sofort $x+\mathbb{Q} \cap y+\mathbb{Q} = \emptyset$, d.h. die zugehörigen Restklassen sind disjunkt. Formal kann man diese Restklassen durch die Äquivalenzrelation $\sim$ mit $x \sim y :\iff x - y \in \mathbb{Q}$ konstruieren (Beweis durch einfaches nachrechnen). Wir bezeichnen die Menge aller solchen Restklassen als $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Nun wählen wir zu jeder der Mengen $(x + \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ ein Element, und sammeln diese in einer Menge E (für diese Konstruktion benötigen wir das Auswahlaxiom, welches wir in dieser Vorlesung als wahr annehmen). Es gilt
$$E + q \cap E + r = \emptyset \ \forall r, q \in \mathbb{Q} \text{ mit } q \neq r,$$
denn $y \in E + q \cap E + r \implies \exists x_1, x_2 \in E : x_1 + q = y = x_2 + r \implies x_1 - x_2 = r - q \in \mathbb{R} \implies x_1$ und x_2 liegen in derselben Restklasse; $\lightning$, da wir aus jeder Restklasse nur ein Element ausgewählt haben. Nun definieren wir $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
Angenommen, es existiert eine Abbildung $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Dann gilt:
$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}_0} (E + q) \subseteq [0, 2]$$

Es gilt aber auch:

$$2 \overset{(ii)}{\leq} m\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}_0}(E+q)\right) \overset{(iv)}{=\!=} \sum_{q\in\mathbb{Q}_0} m(E+q) \overset{(iii)}{=\!=} \sum_{q\in\mathbb{Q}_0} m(E)$$

$$\implies m(E) = 0 \tag{$*$}$$

Andererseits gilt aber

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(E+q) \supseteq [0,1],$$

denn für $y \in [0,1]$ existieren ein $x \in E$ und ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $y = x+q$. Es folgt:

$$1 \overset{(i)}{=\!=} m([0,1]) \overset{(ii)}{\leq} m\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(E+q)\right) \overset{(iv)}{=\!=} \sum_{q\in\mathbb{Q}} m(E+q) \overset{(iii)}{=\!=} \sum_{q\in\mathbb{Q}} m(E) \overset{(*)}{=\!=} \sum_{q\in\mathbb{Q}} 0 = 0$$

Dies ist ein Widerspruch, also existiert keine Abbildung m mit den Eigenschaften (i)-(iv).

1 Maße und messbare Funktionen

1.1 σ-Algebren und Maße

Sei X im Weiteren eine Menge.

Definition 1.1.1. *Eine Menge von $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt <u>σ-Algebra auf X</u>, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) $X \in \mathscr{A}$

(ii) $A \in \mathscr{A} \implies X \setminus A \in \mathscr{A}$

(iii) $A_i \in \mathscr{A}$ *für* $i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$

Das Paar $(X, \mathscr{A})$ heißt dann <u>messbarer Raum</u>.

Bemerkung. *(i) Eine σ-Algebra $\mathscr{A}$ ist auch unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen, denn es gilt:*

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \underbrace{X \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overbrace{X \setminus A_i}^{\in\mathscr{A} \text{ nach } (ii)}\right)}_{\in\mathscr{A} \text{ nach } (iii)}}_{\in\mathscr{A} \text{ nach } (ii)}$$

(ii) Es gilt auch $\emptyset \in \mathscr{A}$, und die Implikation $A, B \in \mathscr{A} \implies A \setminus B \in \mathscr{A}$.

Beispiel. *$\mathcal{P}(X)$ sowie $\{\emptyset, X\}$ sind σ-Algebren.*

Satz 1.1.2. *Jeder Schnitt von σ-Algebren auf X ist wieder eine σ-Algebra.*

Beweis. Sei $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von σ-Algebren, und sei

$$A \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i =: \mathscr{A}.$$

Dann gilt $A \in \mathscr{A}_i \ \forall i \in I$. Damit ist aber auch $X \setminus A \in \mathscr{A}_i \ \forall i \in I$. Somit folgt $X \setminus A \in \mathscr{A}$, d.h. Eigenschaft (ii) ist gezeigt. Eigenschaft (i) ist trivial, und (iii) folgt analog zu (ii). □

Bemerkung. *Nicht jede Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(x)$ ist eine σ-Algebra, aber man kann aus einer gegebenen Menge immer eine σ-Algebra erzeugen.*

Definition 1.1.3. *Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(x)$. Dann heißt*

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathscr{A} \mid \mathscr{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathscr{A}\}$$

die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra. $\mathcal{E}$ wird dann erzeugendes System von $\sigma(\mathcal{E})$ genannt.

Bemerkung. *(i) $\sigma(\mathcal{E})$ ist eine σ-Algebra, als Schnitt von σ-Algebren.*

(ii) Es gilt $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$.

(iii) Damit ist $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Der Beweis ist Übungsaufgabe.

Beispiel. *(i) Sei $E \subseteq X$ und $\mathcal{E} := \{E\}$; dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, X \setminus E, X\}$.*

(ii) Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann heißt $\sigma(\tau)$ Borel-σ-Algebra, auch geschrieben $\mathscr{B}(\tau)$. Ihre Elemente heißen Borelmengen. Für $X = \mathbb{R}^n$ mit üblicher Topologie schreiben wir $\mathscr{B}^n$.

(iii) Seien $X \neq \emptyset$ und $(Y, \mathscr{C})$ ein messbarer Raum, sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist

$$f^{-1}(\mathscr{C}) = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathscr{C}\}$$

ebenfalls eine σ-Algebra auf X.

(iv) Seien $X \subseteq Y$ und $(Y, \mathscr{C})$ ein messbarer Raum. Dann erzeugt die Identitätsabbildung $\mathrm{Id} : X \to Y, x \mapsto x$ eine σ-Algebra durch

$$\mathscr{C}|_X = \mathrm{Id}^{-1}(\mathscr{C}) = \{X \cap C \mid C \in \mathscr{C}\}.$$

Diese wird Spur-σ-Algebra auf X genannt.

(v) *Seien $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{P}(x)$ für $i \in I$. Dann gilt:*

$$\sigma\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{E}_i\right) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\right)$$

Der Beweis ist Übungsaufgabe.

Definition 1.1.4. *Wir betrachten $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Wir setzen $-\infty < a < +\infty \; \forall a \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass eine Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen $s \in \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert, falls eine der folgenden Aussagen gilt:*

(i) *Es gilt $s \in \mathbb{R}$, und $\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} : s_k \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \; \forall k \geq K$.*

(ii) *Es gilt $s = +\infty$, und $\forall r > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} : s_k \in (r, +\infty] \; \forall k \geq K$*

(iii) *Es gilt $s = -\infty$, und $\forall r > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} : s_k \in [-\infty, r) \; \forall k \geq K$.*

Der bekannte Konvergenzbegriff überträgt sich (einschließlich bestimmter Divergenz). Insbesondere konvergiert nun jede monotone Folge. Eine Menge $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann offen, wenn $U \cap \mathbb{R}$ offen ist und, falls $+\infty$ (bzw. $-\infty$) $\in U$ ist, ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $(a, +\infty] \subseteq U$ (bzw. $[-\infty, a) \subseteq U$). Nach Definition wird die Borel-σ-Algebra $\overline{\mathscr{B}}$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch die offenen Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$ erzeugt, und es gilt:

$$\overline{\mathscr{B}} = \{B \cup E \mid B \in \mathscr{B} \text{ und } E \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$$

Wir definieren nun auch eine Addition auf $\overline{\mathbb{R}}$: gelte $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $+\infty + a = +\infty \; \forall a \in \mathbb{R}$; analog für $-\infty$. Nur die Summe $(+\infty) + (-\infty)$ bleibt undefiniert. Wir erinnern uns, dass $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$ ist (dies ist konsistent mit $A \subseteq B \implies \sup A \leq \sup B$ und $\inf A \geq \inf B$).

Definition 1.1.5. *Sei $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Eine Funktion $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ heißt Maß auf $\mathscr{A}$, falls gilt:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) *Für paarweise disjunkte Mengen $A_i \in \mathscr{A}$ (für $i \in \mathbb{N}$) gilt:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Das Tripel $(X, \mathscr{A}, \mu)$ wird als Maßraum bezeichnet. Die Mengen aus $\mathscr{A}$ werden als messbare Mengen bezeichnet.

Bemerkung. (i) *Die Eigenschaft (ii) heißt σ-Additivität.*

(ii) *Aus dieser Eigenschaft folgt auch endliche Additivität, da wir für jede endliche Familie von Mengen* $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$ *einfach* $A_k := \emptyset\ \forall k > n$ *setzen können, und erhalten:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \overset{(ii)}{=\!=} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \overset{(i)}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} A_i$$

(iii) *Es gilt auch die Implikation* $(A \subseteq B) \implies \mu(A) \leq \mu(B)$*, denn:*

$$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$$

Definition 1.1.6. *Sei* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum.* μ *heißt* <u>*endlich*</u>*, falls*

$$\mu(A) < +\infty\ \forall A \in \mathscr{A}$$

gilt. μ *heißt* <u>σ*-endlich*</u>*, falls für* $j \in \mathbb{N}$ *Mengen* $A_j \in \mathscr{A}$ *existieren, sodass gilt:*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = X \text{ und } \mu(A_j) < +\infty\ \forall j \in \mathbb{N}$$

Beispiel. *Seien* X *eine beliebige Menge und* $\mathscr{A} = \mathcal{P}(X)$*. Für einen Punkt* $x \in X$ *ist das zugehörige* <u>*Dirac-Maß*</u> *definiert durch:*

$$\delta_x : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty],\ \delta_x(A) = \begin{cases} +1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} = \chi_A(x) \text{ (für } A \in \mathscr{A})$$

Es gilt $\delta_x(A) \in 0, 1$*,* $\delta_x(\emptyset) = 0$*,* $\delta_x(X) = 1$*. Die* σ*-Additivität folgt mit dem folgenden Argument: sei* $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ *eine Vereinigung von disjunkten Mengen* $A_j \in \mathscr{A}$ *(für* $j \in \mathbb{N}$*). Ist* $x \notin A$*, so ist* $x \notin A_j\ \forall j \in \mathbb{N}$*, und somit* $\delta_x(A) = 0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_x(A_j)$*. Ist* $x \in A$*, so existiert ein* $j_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $x \in A_{j_0}$*. Dieses ist aber eindeutig, da die Mengen* A_j *disjunkt sind. Es folgt*

$$\delta_x(A) = 1 = \underbrace{\delta_x(A_{j_0})}_{=1} + \underbrace{\sum_{j\neq j_0} \overbrace{\delta_x(A_j)}^{=0}}_{=0},$$

also ist δ_x *ein Maß.*

Bemerkung. *Gilt in einem Maßraum* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *die Eigenschaft* $\mu(X) = 1$*, so bezeichnen wir* μ *als* <u>*Wahrscheinlichkeitsmaß*</u>*.*

Beispiel. (*i*) *Auf einer Menge X definieren wir das sogenannte Zählmaß,*

$$\mathrm{card} : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty],\ \mathrm{card}(A) := \begin{cases} |A| & A \text{ endlich} \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(*ii*) *Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, $M \in \mathscr{A}$ und $A|_M \subseteq \mathcal{P}(M)$ die von $\mathscr{A}$ auf M induzierte σ-Algebra. Wir können nun ein Maß $\mu|_M$ auf $\mathscr{A}|_M$ defineren; wir wissen, dass $\forall B \in \mathscr{A}|_M$ ein $A \in \mathscr{A}$ existiert, sodass $B = A \cap M$ ist (dieses ist nicht unbedingt eindeutig). Dann setzen wir $\mu|_M(B) = \mu(\underbrace{A \cap M}_{\in \mathscr{A}})$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ mit $A_1 \cap M = B = A_2 \cap M$ ist*

$$\mu(A_1 \cap M) = \mu(\underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathscr{A}}}{B}) = \mu(A_2 \cap M).$$

(*iii*) *Sei $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Das triviale Maß ist gegeben durch $\mu(A) = 0\ \forall A \in \mathscr{A}$. Dieses Maß ist endlich.*

Satz 1.1.7 (Stetigkeitseigenschaften von Maßen)**.** *Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, und seien $A_i \in \mathscr{A}$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(*i*) *Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \ldots$ folgt:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

(*ii*) *Aus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \ldots$ und $\mu(A_1) < \infty$ folgt:*

$$\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

(*iii*) *Es gilt:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Beweis. (*i*) Wir setzen $\overline{A_1} = A_1, \overline{A_2} = A_2 \setminus A_1, \ldots, \overline{A_k} = A_k \setminus A_{k-1}, \ldots$. Damit sind die Mengen $\overline{A_k}$ paarweise disjunkt, und die σ-Additivität liefert:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = \lim_{k \to \infty} \mu\Bigg(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i}}_{= A_k}\Bigg) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$$

(ii) Wir betrachten $A'_k = A_1 \setminus A_k$. Dann gilt:

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_k) + \mu(A_1 \setminus A_k)$$

Mit *(i)* folgt nun:

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) &= \lim_{k\to\infty} \mu(A'_k) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right) \\
&= \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \\
&= \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)
\end{aligned}$$

(iii) Wir betrachten $\widetilde{A_1} = A_1, \widetilde{A_k} = A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ für $k \geq 2$. Da

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{A_k}$$

ist, folgt die Behauptung aus σ-Additivität und Monotonie.

$\square$

Bemerkung. *Für (ii) reicht auch die Existenz von $k \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_k) < \infty$, aber mit $A_k = \{k, k+1, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ gilt* $\operatorname{card}(A_k) = +\infty$*, aber*

$$\operatorname{card}\underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_k\right)}_{=\emptyset} = 0.$$

Definition 1.1.8. *Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $A \in \mathscr{A}$ heißt <u>Nullmenge</u>, wenn $\mu(A) = 0$ gilt. Das System von Nullmengen bezeichnen wir mit $\mathscr{N}(\mu)$. Ein Maß μ heißt <u>vollständig</u>, wenn aus $N \subseteq A$ für ein beliebiges $A \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A) = 0$ folgt, dass $N \in \mathscr{A}$ ist, und dass $\mu(N) = 0$ ist.*

Bemerkung. *Nicht jedes Maß ist vollständig; seien z.B. $X = \{1, 2\}$, $\mathscr{A} = \{\emptyset, X\}$ und $\mu(\emptyset) = \mu(X) = 0$. Dann gilt $\{1\} \subseteq X$, aber $\{1\} \not\subseteq \mathscr{A}$. Man kann aber jedes Maß vervollständigen. Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann betrachten wir*

$$T_\mu := \{N \in \mathcal{P}(X) \mid \exists A \in \mathscr{N}(\mu) : N \subseteq A\}$$

und bezeichnen mit

$$\overline{\mathscr{A}_\mu} := \{A \cup N \mid A \in \mathscr{A}, N \in T_\mu\}$$

die Erweiterung der σ-Algebra $\mathscr{A}$ um die Mengen in T_μ. Auf $\overline{\mathscr{A}_\mu}$ definieren wir

$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)\ \forall A \in \mathscr{A}, N \in T_\mu$$

Der Wert von $\overline{\mu}$ hängt nicht von der Wahl von $A \in \mathscr{A}$ und $N \in T_\mu$ ab. $\overline{\mu}$ heißt <u>Vervollständigung von μ</u>.

Satz 1.1.9 (Vervollständigung)**.** *Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $\overline{\mathscr{A}_\mu}$ eine σ-Algebra, und $(X, \overline{\mathscr{A}_\mu}, \overline{\mu})$ ist vollständig. Es gilt $\overline{\mu}(A) = \mu(A)\ \forall A \in \mathscr{A}$.*

Beweis. Es gilt $\mathscr{A} \subseteq \overline{\mathscr{A}_\mu}$. Ferner ist T_μ stabil (d.h. abgeschlossen) unter abzählbaren Vereinigungen. Dies gilt damit aber auch für $\overline{\mathscr{A}_\mu}$. Für $E \in \overline{\mathscr{A}_\mu}$ existieren ein $A \in \mathscr{A}$ und ein $N \in T_\mu$, sowie ein $B \in \mathscr{A}$ mit $\mu(B) = 0$ und $N \subseteq B$, sodass $E = A \cup N$ ist (folgt sofort aus der Definition von $\overline{\mathscr{A}_\mu}$). Insbesondere ist dann $B \setminus N \in T_\mu$, und damit gilt $X \setminus E = (X \setminus (A \cup B)) \cup (B \setminus N) \in \overline{\mathscr{A}_\mu}$. Da auch $X \in \overline{\mathscr{A}_\mu}$ ist, ist $\overline{\mathscr{A}_\mu}$ eine σ-Algebra. Wir sehen, dass $\overline{\mu}$ eine Maß ist.
Wir wollen nun die Vollständigkeit von $\overline{\mu}$ überprüfen. Seien dafür $B \in \overline{\mathscr{A}_\mu}$ und $M \subseteq B = A \cup N$, sodass $A \in \mathscr{A}$ und $N \in T_\mu$ sind, und sodass $\overline{\mu}(B) = 0$ ist. Per Definition von $\overline{\mu}$ ist dann $\mu(A) = \overline{\mu}(B) = 0$. Aus

$$M = \underbrace{(M \cap A)}_{\in T_\mu} \cup \underbrace{(M \cap N)}_{\in T_\mu} \in T_\mu$$

folgt $M \in \overline{\mathscr{A}_\mu}$, womit $\overline{\mu}$ vollständig ist. Ferner sehen wir sofort, dass μ und $\overline{\mu}$ auf $\mathscr{A}$ übereinstimmen. □

Satz 1.1.10 (Eindeutigkeit der Vervollständigung)**.** *Seien $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(X, \overline{\mathscr{A}_\mu}, \overline{\mu})$ eine Vervollständigung dieses Raumes nach obiger Konstruktion. Sei ferner $(X, \mathscr{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum mit $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathscr{A}$. Dann gilt $\overline{\mathscr{A}_\mu} \subseteq \mathscr{B}$ und $\overline{\mu} = \nu$ auf $\overline{\mathscr{A}_\mu}$.*

Beweis. Aus $\mathscr{A} \subseteq B$ und $\mu = \nu$ auf $\mathscr{A}$ folgt $\mathscr{N}(\mu) \subseteq \mathscr{N}(\nu)$, und somit $T_\mu \subseteq T_\nu$. Da ν vollständig ist, sind alle Mengen in T_ν messbar, d.h. $T_\nu \subseteq \mathscr{B}$. Damit ist aber $T_\mu \subseteq \mathscr{B}$, also ist $\overline{\mathscr{A}_\mu} \subseteq \mathscr{B}$. Da $\overline{\mu}$ auf $\overline{\mathscr{A}_\mu}$ vollständig durch μ auf $\mathscr{A}$ bestimmt ist, folgt sofort $\overline{\mu} = \nu$ auf $\overline{\mathscr{A}_\mu}$, da $\mu = \nu$ auf $\mathscr{A}$. □

1.2 Messbare Funktionen

Definition 1.2.1. *Seien* $(X, \mathscr{A})$ *und* $(Y, \mathscr{C})$ *messbare Räume. Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *heißt* <u>*$\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar*</u>*, falls gilt:*

$$f^{-1}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A} \text{ bzw. } \forall C \in \mathscr{C} : f^{-1}(C) \in \mathscr{A}$$

Dabei schreiben wir $f^{-1}(\mathscr{C})$ *für* $\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathscr{C}\}$*.*

Bemerkung. *Sei* $D \in \mathscr{A}$*. Dann nennen wir eine Funktion* $f : D \to Y$ <u>*messbar*</u>*, falls* $f^{-1}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A}|_D$ *ist (wobei* $\mathscr{A}|_D$ *die von* $\mathscr{A}$ *auf* D *induzierte* σ*-Algebra bezeichnet).*

Beispiele. (*i*) *Alle konstanten Funktionen sind messbar.*

(*ii*) *Zu* $E \subseteq X$ *betrachten wir die charakteristische Funktion auf* E*:*

$$\chi_E : X \to \mathbb{R}, \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Versehen wir $\mathbb{R}$ *mit der Borel-*σ*-Algebra* $\mathscr{B}$*, so ist* χ_E *genau dann messbar, wenn* $E \in \mathscr{A}$ *ist (wobei* $\mathscr{A}$ *die* σ*-Algebra auf* X *bezeichnet).*

(*iii*) *Hintereinanderschaltungen von messbaren Funktionen sind messbar.*

Lemma 1.2.2. *Seien* $(X, \mathscr{A})$ *und* $(Y, \mathscr{C})$ *messbare Räume, und sei* $f : X \to Y$ *eine Funktion. Für beliebige Mengensysteme* $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{C}$ *gilt:*

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ eine σ-Algebra ist (Übungsaufgabe). Ferner gilt $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$, da $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ ist. Wir sehen auch, dass die Menge

$$\mathscr{F} := \{F \subseteq Y \mid f^{-1}(F) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$$

ebenfalls eine σ-Algebra ist (Beweis durch einfaches Nachrechnen). Nachdem $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{F}$ ist, gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathscr{F}$, und somit (per Definition von $\mathscr{F}$) folgt $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$. □

Folgerung 1.2.3 (Messbarkeitskriterium)**.** *Seien* $(X, \mathscr{A})$ *und* $(Y, \mathscr{C})$ *messbare Räume, und sei* $\mathscr{C} = \sigma(\mathcal{E})$*. Dann ist jede Abbildung* $f : X \to Y$ *mit* $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathscr{A}$ $\mathscr{A}$*-*$\mathscr{C}$*-messbar.*

Beweis. Aus Lemma 1.2.2 folgt sofort:

$$f^{-1}(\mathscr{C}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$$

□

Beispiele. *(i) Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist $\mathscr{B}^n$-$\mathscr{B}^m$-messbar.*

(ii) Seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, $(Y, \mathscr{C})$ ein messbarer Raum, und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir wissen, dass $f^{-1}(\mathscr{C})$ eine σ-Algebra ist. Dies ist die kleinste σ-Algebra, die $f : X \to Y$ messbar macht. Wir nennen $f^{-1}(\mathscr{C})$ die <u>von f und $(Y, \mathscr{C})$ auf X induzierte σ-Algebra</u>. Analog gehen wir für Familien von Funktionen $(f_i)_{i \in I}$ vor. Die σ-Algebra

$$\sigma\left(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathscr{C})\right)$$

ist dann die kleinste σ-Algebra auf X, unter welcher die Funktionen $(f_i)_{i \in I}$ messbar sind. Diese bezeichnen wir als die <u>von $(f_i)_{i \in I}$ und $(Y, \mathscr{C})$ auf X erzeugte σ-Algebra</u>.

Bemerkung. *Wir betrachten $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, und vereinbaren folgende Rechenregel:*

$$s \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot s = \begin{cases} \pm\infty & s \in (0, \infty] \\ 0 & s = 0 \\ \mp\infty & s \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

Damit ist die Multiplikation $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ unstetig in den 4 Punkten $(0, +\infty)$, $(0, -\infty)$, $(+\infty, 0)$ und $(-\infty, 0)$. Beispielsweise gilt $\lim_{s \to 0} s \cdot +\infty = \lim_{s \to 0} +\infty = +\infty$, aber $(\lim_{s \to 0} s) \cdot (+\infty) = 0 \cdot (+\infty) = 0$.

Definition 1.2.4. *Sei $(X, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum, und $D \in \mathscr{A}$. Eine Funktion $f : D \to \overline{R}$ heißt <u>numerische Funktion</u> (da sie „Nummern“ als Bildwerte annimmt).*

Bemerkung. *Auf $\overline{\mathbb{R}}$ verwenden wir die Borel-σ-Algebra $\overline{\mathscr{B}}$. Damit sind numerische Funktion $\mathscr{A}$-messbar auf D, wenn $f^{-1}(\overline{\mathscr{B}}) \subseteq \mathscr{A}|_D$ ist. N.b.: wir schreiben bei Benutzung der Borel-σ-Algebra „$\mathscr{A}$-messbar“ statt „$\mathscr{A}$-$\overline{\mathscr{B}}$-messbar“.*

Lemma 1.2.5 (Messbarkeitskriterien für numerische Funktionen)**.** *Seien $(X, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathscr{A}$ und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist $\mathscr{A}$-messbar.

(ii) Für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(U) \in \mathscr{A}$ und $f^{-1}(\{+\infty\})$ sowie $f^{-1}(\{-\infty\})$ liegen in $\mathscr{A}$.

(iii) Es gilt $\forall s \in \mathbb{R}$: $\{f \leq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathscr{A}$.

(iv) Es gilt $\forall s \in \mathbb{R}$: $\{f < s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathscr{A}$.

(v) Es gilt $\forall s \in \mathbb{R}$: $\{f \geq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [s, +\infty]\} \in \mathscr{A}$.

(vi) Es gilt $\forall s \in \mathbb{R}$: $\{f > s\} := \{x \in D \mid f(x) \in (s, +\infty]\} \in \mathscr{A}$.

Beweis. Die Aussage (i) und (ii) sind dank Folgerung 1.2.3 äquivalent. Aus (ii) folgt (vi), da:

$$\{f \geq s\} = \underbrace{f^{-1}((s, +\infty))}_{\in \mathscr{A}} \cup \underbrace{f^{-1}(\{+\infty\})}_{\in \mathscr{A}} \in \mathscr{A}$$

Ferner sind die Aussagen (iii), (iv), (v) und (vi) sowieso äquivalent, da sie Komplement/Vereinigung/ Schnitte von einander sind:

$$\{f \leq s\} = D \setminus \{f > s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < s + \frac{1}{k}\}$$

$$\{f \geq s\} = D \setminus \{f < s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > s - \frac{1}{k}\}$$

Nun gelte eine Aussage aus (iii)-(vi) (und damit alle dieser Aussagen). Damit gilt für ein offenes Intervall (a, b): $f^{-1}((a, b)) = \{f > a\} \cap \{f < b\} \in \mathscr{A}$. Nun lässt sich jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

von offenen Intervallen $I_k = (a_k, b_k)$ darstellen (Beweis in der nächsten Vorlesung). Damit ist $f^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(I_k) \in \mathscr{A}$ ebenfalls eine messbare Menge. Ferner gilt:

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > k\} \in \mathscr{A} \text{ und } f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < -k\} \in \mathscr{A}$$

□

Proposition 1.2.6. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}$ *offen und nicht leer. Dann ist* U *die abzählbare Vereinigung offener Intervalle.*

Beweis. Zu $x, y \in U$ definieren wir eine Relation $\sim$ durch

$$x \sim y :\iff [\min\{x, y\}, \max\{x, y\}] \subseteq U.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation (Reflexivität: $[x, x] = \{x\} \subset U$; Symmetrie folgt aus der Symmetrie des angegebenen Intervalls; Transitivität: Nachrechnen mit Fallunterscheidungen). Die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ sind genau die disjunkten, offenen Intervalle, die in U liegen (sei $(a, b) \subset U$: dann gilt $\forall x, y \in (a, b)$: $[\min\{x, y\}, \max\{x, y\}] \subset (a, b) \subset U$). Sei $\mathcal{F}$ die Menge dieser Äquivalenzklassen; dann ist $U = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I$ (denn jeder

Punkt in U ist, da U offen ist, in mindestens einem offenen Intervall in U; andererseits ist auch jede Menge in $\mathcal{F}$ per Def. Teilmenge von U). Nun sei zu $I \in \mathcal{F}$ jeweils ein $q_I \in I \cap \mathbb{Q}$ gewählt. Dann ist die Abbildung $\mathcal{F} \to \mathbb{Q}, I \mapsto q_I$ injektiv, da die Mengen in $\mathcal{F}$ disjunkt sind; damit ist $\mathcal{F}$ abzählbar. □

Lemma 1.2.7. *Seien $(X, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathscr{A}$ eine messbare Menge, und $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{A}$-messbare Funktionen. Dann sind die Mengen*

$$\{f < g\} := \{x \in D \mid f(x) < g(x)\}$$

und

$$\{f \leq g\} = \{x \in D \mid f(x) \leq g(x)\}$$

ebenfalls messbare Mengen (d.h. sie liegen ebenfalls in $\mathscr{A}$).

Beweis. Es gilt:

$$\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\underbrace{\{f < q\}}_{\in \mathscr{A}} \cap \underbrace{\{g > q\}}_{\in \mathscr{A}}) \in \mathscr{A}$$

Damit gilt für $\{f \leq g\}$:

$$\{f \leq g\} = D \setminus \underbrace{\{g < f\}}_{\in \mathscr{A}} \in \mathscr{A}$$

□

Wir betrachten im Folgenden punktweise Konvergenz von Funktionen. So sind z.B. $\liminf$ und $\inf$ von Funktionenfolgen $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegeben durch

$$\left(\liminf_{k \to \infty} f_k\right)(x) := \liminf_{k \to \infty} f_k(x)$$

bzw.

$$\left(\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k\right)(x) := \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$$

Satz 1.2.8 (Grenzwerte messbarer Funktionenfolgen sind messbar)**.** *Seien $(X, \mathscr{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathscr{A}$ eine Menge, und $f_k : D \to \overline{\mathbb{R}}$ für $k \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen. Dann sind auch*

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k \ ; \ \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \ ; \ \liminf_{k \to \infty} f_k \ ; \ \limsup_{k \to \infty} f_k$$

messbare Funktionen.

Beweis. Es gilt $\forall s \in \mathbb{R}$:

$$\{\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k \geq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f_k \geq s\} \in \mathscr{A}$$

Damit ist $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k \in \mathscr{A}$ nach Lemma 1.2.5. Analog für $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Ferner gilt:

$$\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\inf_{l\geq k} f_l \right) \in \mathscr{A}$$

Analog für $\limsup_{k\in\mathbb{N}} f_k$. □

Satz 1.2.9 (Messbarkeit und Rechenoperationen)**.** *Seien $(X, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathscr{A}$ eine Menge, und $f, g : D \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen. Dann sind auch die folgenden Funktionen (auf den jeweiligen Definitionsgebieten, welche auch immer in $\mathscr{A}$ liegen) messbar:*

- $f + g$
- f^+ *und* f^-
- $\max(f, g)$
- $\min(f, g)$
- $|f|$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$

Beweis. Übungsaufgabe. Beispiel:

$$\{f + g \leq s\} = \bigcup_{\substack{t,r \\ r+t<s}} (\{f < r\} \cap \{g < t\})$$

□

Wir betrachten den Maßraum $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Oft kommt es vor, dass Aussagen nur für Punkte außerhalb einer Nullmenge gezeigt werden können.

Definition 1.2.10. *Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, und $E(x)$ eine Aussage auf X. Wir sagen „$E(x)$ ist wahr für <u>μ-fast-alle</u> $x \in X$“ (oder „E gilt <u>μ-fast-überall</u>“ oder „<u>μ-fast-sicher</u> gilt E“ in der Stochastik), falls eine μ-Nullmenge N existiert, sodass $\{x \in X \mid E(x) \text{ ist falsch}\} \subseteq N$ ist.*

Beispiele. (*i*) *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann bedeutet „$f \leq g$ f.ü.“, falls ein $N \subseteq X$ mit $\mu(N) = 0$ existiert, sodass $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X \setminus N$ ist.*

(*ii*) *$f : X \to \mathbb{R}$ ist μ-f.ü. definiert, falls ein $N \subseteq X$ mit $\mu(N) = 0$ existiert, sodass für $D = X \setminus N$ die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im üblichen Sinne wohldefiniert ist.*

(*iii*) *Es gilt* $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ *f.ü., falls ein* $N \subseteq X$ *mit* $\mu(N) = 0$ *existiert, sodass* $f_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$ $\forall x \in X \setminus N$ *gilt. Interessanterweise gilt dies immer noch, wenn die* f_k *auch nur f.ü. definiert sind: sei jedes* f_k *definiert auf* $D_k = X \setminus N_k$ *für eine Nullmenge* N_k*. Dann ist* f *auf der Menge*

$$D = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_k = X \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$$

definiert; aber

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0,$$

d.h. f *ist* μ*-f.ü. definiert.*

Definition 1.2.11. *Sei* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum. Eine auf* $D \in \mathscr{A}$ *definierte numerische Funktion* $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ *heißt* <u>*μ-messbar (auf X)*</u>*, falls* $\mu(X \setminus D) = 0$ *ist, und* f $\mathscr{A}|_D$*-messbar ist.*

Bemerkung. *Wir unterscheiden zwischen* $\mathscr{A}$*-messbaren und* μ*-messbaren Funktionen. Die* $\mathscr{A}$*-messbaren Funktionen müssen auf ganz* X *definiert sein, und sind bezüglich* $\mathscr{A}$ *messbar. Die* μ*-messbaren Funktionen können auch nur auf einer Menge* D*, deren Komplement eine Nullmenge ist, definiert sein, und müssen dann auf* D *messbar sein.*

Bemerkung. (*i*) *Die auf* $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$ *definierte Relation* $f \sim g :\Longleftrightarrow f = g$ μ*-f.ü. ist eine Äquivalenzrelation.*

(*ii*) *Sei* $D \in \mathscr{A}$ *und* $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine* μ*-messbare Funktion. Dann gibt es eine* $\mathscr{A}$*-messbare Funktion* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *mit* $f = g$ *auf* D*. Insbesondere ist* $f = g$ μ*-f.ü. Eine mögliche Wahl für* g *ist:*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases}$$

Damit übertragen sich die Sätze zu Grenzwerten und Rechenoperationen auch auf μ*-messbare Funktionen.*

Lemma 1.2.12. *Seien* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *ein vollständiger Maßraum und* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine* μ*-messbare Funktion auf* X*. Sei ferner* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$*, sodass* $g = f$ μ*-f.ü. ist. Dann ist auch* g μ*-messbar.*

Beweis. Sei f auf $D \in \mathscr{A}$ definiert, d.h. $\mu(X \setminus D) = 0$. Ferner sei g auf $E \subseteq X$ definiert. Damit existiert eine Nullmenge $N \in \mathscr{A}$, sodass $X \setminus N \subseteq D \cap E$ ist, und sodass $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X \setminus N$ ist. Damit folgt $X \setminus D \subset X \setminus (D \cap E) \subset X \setminus (X \setminus N) = N$. Da μ

vollständig ist, folgt, dass $E \in \mathscr{A}$ ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\{x \in E \mid g(x) < s\} = \{x \in E \cap N \mid g(x) < s\} &\cup \{x \in E \cap (X \setminus N) \mid g(x) < s\} \\
=&\{x \in E \cap N \mid g(x) < s\} \cup \{x \in X \setminus N \mid f(x) < s\} \\
=&\{x \in E \cap N \mid g(x) < s\} \\
&\cup \{x \in D \mid f(x) < s\} \setminus \{x \in D \cap N \mid f(x) < s\} \\
=&\underbrace{\{x \in E \cap N \mid g(x) < s\}}_{\in\mathscr{A} \text{ da Teilmenge der Nullmenge } E\cap N} \\
&\cup \overbrace{\{x \in D \mid f(x) < s\}}^{\in\mathscr{A} \text{ da } f \text{ messbar ist}} \setminus \underbrace{\{x \in D \cap N \mid f(x) < s\}}_{\in\mathscr{A} \text{ da Teilmenge der Nullmenge } D\cap N}
\end{aligned}$$

Somit ist g μ-messbar. $\square$

Satz 1.2.13. *Seien $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und f_k für $k \in \mathbb{N}$ μ-messbare Funktionen. Falls f_k μ-f.ü. gegen f konvergiert, so ist f μ-messbar.*

Beweis. Seien die Funktionen f_k jeweils auf $D_k \in \mathscr{A}$ definiert. Mit

$$D := \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \in \mathscr{A}$$

sind alle f_k auf D definiert, und die Menge $X \setminus D$ ist eine Nullmenge. Wir setzen

$$E := \{x \in D \mid \lim_{k\to\infty} f_k(x) \neq f(x)\},$$

womit auch E eine Nullmenge ist (da die f_k μ-f.ü. punktweise konvergieren). (N.b.: dies gilt, weil per Def. der '"f.ü.-Eigenschaft" gilt, dass E Teilmenge einer Nullmenge ist; dank vollständig des Maßraumes muss dann aber auch E messbar sein, und ist damit eine Nullmenge.) Wir setzen nun:

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus E \\ 0 & x \notin D \setminus E \end{cases} = f(x) \cdot \chi_{D\setminus E}(x)$$

sowie:

$$\widetilde{f_k}(x) := \begin{cases} f_k(x) & x \in D \setminus E \\ 0 & x \notin D \setminus E \end{cases} = f_k(x) \cdot \chi_{D\setminus E}(x)$$

Dann konvergiert $\widetilde{f_k}$ überall punktweise gegen $\widetilde{f}$. Die Funktionen $\widetilde{f_k}$ sind $\mathscr{A}$-messbar (als charakteristische Funktion einer messbaren Menge multipliziert mit einer messbaren Funktion auf der ganzen Menge).Somit ist $\widetilde{f}$ auch $\mathscr{A}$-messbar (s. Übungsblatt). Es gilt

$f = \widetilde{f}$ μ-f.ü.; damit ist f μ messbar (nach Lemma 1.2.12). □

Satz 1.2.14 (Satz von Egorov). *Seien $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, $D \in \mathscr{A}$ eine Menge mit $\mu(D) < \infty$ und f_k für $k \in \mathbb{N}$ sowie f μ-f.ü. endliche Funktionen auf D, wobei f eine μ-messbare Funktion ist, sodass f_k μ-f.ü. punktweise gegen f konvergiert. Dann existiert $\forall \varepsilon > 0$ eine Menge $B \in \mathscr{A}$ mit $B \subset D$, sodass gilt:*

(i) $\mu(D \setminus B) < \varepsilon$.

(ii) f_k *konvergiert auf B gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Wir definieren:

$$E := \{x \in D \mid f_n(x) \text{ und } f(x) \text{ sind endlich, und} f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)\}$$

Dann existiert (da f und f_k μ-f.ü. endlich sind, und f_k μ-f.ü. punktweise gegen f konvergiert) eine Nullmenge N mit $D \setminus E \subseteq N$. Wir nehmen im Weiteren an, dass $D = E$ ist (sonst ersetzen wir D durch $D \setminus N$ in den Voraussetzungen). Nun setzen wir

$$C_{i,j} := \bigcup_{k=j}^{\infty} \{x \in D \mid |f_n(x) - f(x)| > 2^{-i}\}$$

für $i, j \in \mathbb{N}$. Diese Mengen sind immer messbar (als abzählbare Vereinigungen von messbaren Mengen), und es gilt $C_{i,j+1} \subset C_{i,j}$ $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\lim_{j \to \infty} \mu(C_{i,j}) = \mu\underbrace{\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i,j} \right)}_{\text{hier konvergieren die } f_k \text{ nicht!}} = 0$$

nach der Stetigkeit von Maßen, da $\mu(D) < \infty$ ist. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Damit existiert $\forall i \in \mathbb{N}$ ein $N(i) \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(C_{i,N(i)}) < \varepsilon \cdot 2^{-i}.$$

Wir setzen nun

$$B = D \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{i,N(i)} \in \mathscr{A}$$

und erhalten für (i):

$$\mu(D \setminus B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_{i,N(i)}) < \varepsilon$$

Für (ii) wissen wir nun, dass $\forall i \in \mathbb{N}, x \in B, n > N(i)$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-i}$$

d.h. f_n konvergiert auf B gleichmäßig gegen f. $\square$

1.3 Äußere Maße

Definition 1.3.1. *Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt äußeres Maß auf X, falls gilt:*

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \implies \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Diese Eigenschaft nennt sich σ-Subadditivität.

Bemerkung. *Monotonie und endliche Subadditivität folgen sofort.*

Definition 1.3.2. *Sei μ ein äußeres Maß auf X. $A \subseteq X$ heißt μ-messbar, falls $\forall S \subseteq X$ gilt:*

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \qquad (*)$$

Das System aller μ-messbaren Mengen bezeichnen wir mit $\mathscr{M}(\mu)$.

Bemerkung. *Da $S = (S \cap A) \cup (S \setminus A)$ ist, gilt mit Subadditivität sofort Gleichheit in $(*)$. Wenn wir also zeigen wollen, dass eine Menge μ-messbar ist, genügt es, die Ungleichung $(*)$ zu zeigen; wenn wir aber wissen, dass eine Menge μ-messbar ist, so können wir $(*)$ mit einem Gleichheitszeichen anstatt eines $\geq$-Zeichens benutzen.*

Beispiel. *Jedes Maß auf ganz $\mathcal{P}(X)$ ist auch ein äußeres Maß auf X (dank Monotonie und σ-Additivität).*

Satz 1.3.3. *Sei $Q \subseteq \mathcal{P}(X)$, sodass $\emptyset \in Q$ ist. Sei $\lambda : Q \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion auf Q (d.h. einfach eine Funktion, deren Urbilder Mengen sind), sodass $\lambda(\emptyset) = 0$ ist. Wir definieren $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ für $E \subseteq X$ durch:*

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) \mid P_i \in Q \text{ und } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \right\}$$

Dann ist μ ein äußeres Maß. N.b.: kann man E nicht durch $P_i \in Q$ überdecken, so ist die Menge, über die das Infimum gebildet wird, leer; dann ist $\mu(E) = \infty$ (per Def. des Infimums als größte untere Schranke).

Beweis. Aus $\emptyset \in Q$ folgt $\mu(\emptyset) = 0$. Sei $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E, E_i \subseteq X$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty$. Wir wollen zeigen, dass die σ-Subadditivität gilt. Wir wählen Überdeckungen $P_{i,j} \in Q$ sodass $\forall \varepsilon > 0$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_{i,j}) < \mu(E_i) + 2^{-i} \cdot \varepsilon$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\mu(E) &\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda(P_{i,j}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \big(\mu(E_i) + 2^{-i} \cdot \varepsilon\big) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon\end{aligned}$$

Die σ-Subadditivität folgt nun, da ε beliebig klein gewählt werden kann. Die Fälle mit $+\infty$ sind trivial. $\square$

Satz 1.3.4 (Bildmaß)**.** *Seien Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf X. Dann ist*

$$f(\mu) : \mathcal{P}(Y) \to [0, \infty], f(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

ein äußeres Maß auf Y, dass sogenannte Bildmaß von μ unter f. Ferner ist B $f(\mu)$-messbar, wenn $f^{-1}(B)$ μ-messbar ist.

Beweis. Sei $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ für $B_i \subseteq Y$. Dann folgt:

$$f^{-1}(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)$$

Aus der Subadditivität von μ folgt nun:

$$f(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\mu)(B_i)$$

Ferner gilt:

$$f(\mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$$

Damit ist $f(\mu)$ ein äußeres Maß auf Y.
Für die andere Behauptung halten wir zunächst fest, dass $B \subseteq Y$ $f(\mu)$-messbar ist, wenn $\forall T \subseteq Y$ gilt:

$$\mu(f^{-1}(T)) \geq \mu(f^{-1}(T \cap B)) + \mu(f^{-1}(T \setminus B)) \tag{$**$}$$

Es gilt $f^{-1}(T \cap B) = f^{-1}(T) \cap f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(T \setminus B) = f^{-1}(T) \setminus f^{-1}(B)$. Somit ist $(**)$ äquivalent zu:

$$\mu(f^{-1}(T)) \geq \mu(f^{-1}(T) \cap f^{-1}(B)) + \mu(f^{-1}(T) \setminus f^{-1}(B))$$

Dies ist aber genau die Anforderung, dass $f^{-1}(B)$ μ-messbar ist, indem wir $S = f^{-1}(T)$ benutzen. $\square$

Satz 1.3.5 (Einschränkung von äußeren Maßen)**.** *Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf X, und sei $M \subset X$. Dann ist die Einschränkung von μ auf M*

$$\mu \llcorner M : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty], (\mu \llcorner M)(A) := \mu(A \cap M)$$

wieder ein äußeres Maß auf X. Ferner gilt folgende Implikation:

$$A \subset X \text{ ist } \mu\text{-messbar} \implies A \text{ ist } \mu \llcorner M\text{-messbar}$$

Beweis. Dass $\mu \llcorner M$ ein äußeres Maß ist, folgt sofort. Sei nun $A \subset X$ μ-messbar, und $S \subset X$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mu \llcorner M(S) &= \mu(\underbrace{S \cap M}_{=:\,T}) \\
&\geq \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \\
&= \mu((S \cap A) \cap M) + \mu((S \setminus A) \cap M) \\
&= (\mu \llcorner M)(S \cap A) + (\mu \llcorner M)(S \setminus A)
\end{aligned}$$

Also gilt auch die zweite Behauptung. $\square$

Satz 1.3.6 (Nullmengen)**.** *Sei μ ein äußeres Maß auf X. Dann gilt folgende Implikation:*

$$\underbrace{N \text{ ist eine } \mu\text{-Nullmenge}}_{\iff \mu(N)=0} \implies N \text{ ist } \mu\text{-messbar}$$

Sei ferner N_k für $k \in \mathbb{N}$ eine μ-Nullmenge. Dann ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ ebenfalls eine Nullmenge.

Beweis. Die Messbarkeit von N folgt sofort aus der Monotonie von μ. Die zweite Aussage folgt aus der σ-Subadditivität:

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$

$\square$

Bemerkung. *Nullmengen sind messbar. Wir werden sehen, dass auch Komplemente von Nullmengen messbar sind. Damit sind insbesondere $\emptyset$ und X immer messbar. Zum* *äußeren Maß*

$$\beta(A) := \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ 1 & A \neq \emptyset \end{cases}$$

sind auch nur die Mengen $\emptyset$ und X messbar (Übungsaufgabe).

Satz 1.3.7 (Äußeres Maß zu Maß)**.** *Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist das System $\mathscr{M}(\mu)$ der μ-messbaren Mengen eine σ-Algebra, und μ ist ein vollständiges Maß auf $\mathscr{M}(\mu)$.*

Beweis. Für diesen Beweis benötigen wir das im Anschluss (ohne diesen Satz) bewiesene Lemma. Wir schreiben fortan $\mathscr{M}$ für $\mathscr{M}(\mu)$. Wir beginnen zunächst, indem wir die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 1.1.1 für $\mathscr{M}$ nachweisen.

(i) Es gilt $X \in \mathscr{M}$, denn $\forall S \subset X$ gilt:

$$\mu(S \cap X) + \mu(S \setminus X) = \mu(S) + \mu(\emptyset) = \mu(S)$$

(ii) Sei $A \in \mathscr{M}$. Dann gilt auch $X \setminus A \in \mathscr{M}$, denn $\forall S \subset X$ gilt:

$$\mu(S \cap (X \setminus A)) + \mu(S \setminus (X \setminus A)) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A) \overset{\substack{A \text{ messbar} \\ \downarrow}}{=} \mu(S)$$

Nun zeigen wir einige Eigenschaften eines Maßes für μ.
Seien $A, B \in \mathscr{M}$. Dann gilt $\forall S \subset X$:

$$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$$

$$\mu(S \cap A) = \mu((S \cap A) \cap B) + \mu((S \cap A) \setminus B)$$

Mit $T := S \setminus (A \cap B)$ folgt nun:

$$\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) = \mu((S \cap A) \setminus B) + \mu(S \setminus A)$$

Somit folgt aber:

$$\mu(S) = \mu(S \cap (A \cap B)) + \mu(S \setminus (A \cap B))$$

Damit ist $A \cap B$ messbar. Da $A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$ ist, und $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ ist, sind auch $A \cup B$ und $A \setminus B$ messbar. Per Induktion folgt damit die Messbarkeit endlicher Schnitte und Vereinigungen.
Nun wollen wir die σ-Additivität von μ auf $\mathscr{M}$ betrachten. Seien dafür A_j für $j \in \mathbb{N}$

paarweise disjunkte Mengen, μ-messbare Funktionen. Mit $S = A_1 \cup A_2$ erhalten wir:

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu((A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu((A_1 \cup A_2) \setminus A_1) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

Per Induktion haben wir somit Additivität für endliche, disjunkte Vereinigungen gezeigt. Folglich gilt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt aufgrund der σ-Subadditivität ebenfalls, also herrscht Gleichheit.

(iii) Es bleibt zu zeigen, dass abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen ebenfalls messbar sind. Seien dafür A_i für $i \in \mathbb{N}$ μ-messbare Menge, und seien diese Mengen o.B.d.A. disjunkt (ansonsten ersetzen wir A_k durch $\widetilde{A_k} := A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$). Sei nun $S \subset X$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \mu\left(S \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\right) + \mu\left(S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\right)\\ &\geq \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i) + \mu\left(S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right)\end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Grenzwert für $k \to \infty$, so folgt die Behauptung:

$$\begin{aligned}\mu(S) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S \cap A_i) + \mu\left(S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right)\\ &\geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(S \cap A_i)\right) + \mu\left(S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right)\\ &= \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) + \mu\left(S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right)\end{aligned}$$

Die Vollständigkeit von μ folgt aus der Messbarkeit von Nullmengen.

□

Lemma 1.3.8. *Seien $A_i \in \mathscr{M}(\mu)$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt $\forall S \subset X$:*

$$\mu\left(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i)$$

Beweis. Für $k = 1$ ist die Behauptung klar. Für $k \geq 2$ folgt induktiv:

$$\begin{aligned} \mu\left(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) &= \mu\left(\left(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_k\right) + \mu\left(\left(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \setminus A_k\right) \\ &= \mu(S \cap A_k) + \mu\left(S \cap \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i) \end{aligned}$$

□

Die Stetigkeitseigenschaften von äußeren Maßen folgen direkt.

Folgerung 1.3.9 (Stetigkeitseigenschaften)**.** *Seien μ ein äußeres Maß auf X und $A_i \in \mathscr{M}(\mu)$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(*i*) *Ist $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, so gilt:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

(*ii*) *Ist $A_1 \supset A_2 \ldots$ und $\mu(A_1) < \infty$, so gilt:*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

Beweis. Analog zu den Stetigkeitseigenschaften von Maßen. □

1.4 Carathéodory-Fortsetzung

Definition 1.4.1. *Ein Mengensystem $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\cup$-stabil (bzw. $\cap$-stabil), wenn $\forall A, B \in \mathscr{A}$ gilt, dass $A \cup B \in \mathscr{A}$ (bzw. $A \cap B \in \mathscr{A}$) ist. Analog definieren wir $\setminus$-Stabilität.*

Definition 1.4.2. *Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Ring über X, falls gilt:*

(*i*) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(*ii*) *Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist auch $A \setminus B \in \mathcal{R}$.*

(*ii*) *Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist auch $A \cup B \in \mathcal{R}$.*

$\mathcal{R}$ heißt Algebra, falls zusätzlich gilt, dass $X \in \mathcal{R}$ ist.

Bemerkung. *(i) Ringe sind ebenfalls* $\cap$*-stabil, denn* $\forall A, B \in \mathcal{R}$ *gilt:*

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$$

(ii) Satz 1.1.2 über Schnitte von σ*-Algebren gilt auch für Ringe und Algebren analog, d.h. für Ringe (bzw. Algebren)* $\mathscr{A}_i$ *für* $i \in I$ *ist auch* $\bigcap\limits_{i \in I} \mathscr{A}_i$ *ein Ring (bzw. eine Algebra). Damit kann man wieder einen Ring (bzw. eine Algebra) aus* $E \subseteq \mathcal{P}(X)$ *konstruieren, indem man alle Ringe (bzw. alle Algebren), die* E *enthalten, miteinander schneidet.*

Beispiele. *(i) Für* $A \subseteq X$ *ist* $\{\emptyset, A\}$ *ein Ring, aber für* $A \neq X$ *keine Algebra.*

(ii) Die Menge $\mathcal{P}(X)$ *ist immer eine Algebra auf* X*.*

(iii) Die Mengen $\{A \subseteq X \mid A \text{ ist endlich}\}$ *und* $\{A \subseteq X \mid A \text{ ist abzählbar}\}$ *sind Ringe über* X*.*

Definition 1.4.3. *Sei* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *ein Ring. Eine Funktion* $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ *heißt Prämaß auf* $\mathcal{R}$*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$.

(ii) Für paarweise disjunkte Mengen $A_i \in \mathcal{R}$ *für* $i \in \mathbb{N}$ *mit* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$*, so gilt:*

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$$

Diese Eigenschaft wird σ*-Additivität genannt.*

Bemerkung. *Die Begriffe „σ-Subadditivität“, „σ-endlich“, „Monotonie“ und „Nullmenge“ verwenden wir analog für Prämaße.*

Beispiele. *(i) Sei* $\mathcal{R}$ *ein Ring über* X*, und* $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ *definiert durch:*

$$\lambda(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ \infty & A \neq \emptyset \end{cases} \quad \text{für } A \in \mathcal{R}$$

Dann ist λ *ein Prämaß auf* $\mathcal{R}$*.*

(ii) Sei $\mathcal{R}$ *der Ring aller endlichen Teilmengen von* X*. Dann ist* $\lambda = \text{card}|_{\mathcal{R}}$ *ein Prämaß auf* X*.*

Definition 1.4.4. *Sei* λ *ein Prämaß auf dem Ring* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$*. Ein äußeres Maß* μ *auf* X *(bzw. Maß* μ *auf* $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$*) heißt Fortsetzung von* λ*, falls gilt:*

(i) $\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$, *d.h.* $\mu(A) = \lambda(A)\ \forall A \in \mathcal{R}$.

(ii) $\mathcal{R} \subseteq \mathscr{M}(\mu)$ *(bzw.* $\mathcal{R} \subseteq \mathscr{A}$*).*

Satz 1.4.5 (Carathéodory-Fortsetzung)**.** *Sei λ ein Prämaß auf $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir definieren $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch*

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}\ \forall i \in \mathbb{N} \text{ und } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\} \tag{$*$}$$

(diese Konstruktion wurde bereits in Satz 1.3.3 verwendet). Dann ist μ eine Fortsetzung von λ.

Beweis. Aus Satz 1.3.3 folgt sofort, dass die Abbildung μ ein äußeres Maß auf X ist. Wir weisen nun noch die Eigenschaften aus Definition 1.4.4 nach.

(i) Sei $A \in \mathcal{R}$ beliebig. Wir sehen schnell, dass $\mu(A) \leq \lambda(A)$ ist, indem wir $A_1 = A$ und $A_j = \emptyset\ \forall j \geq 2$ setzen. Dann gilt:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} \emptyset = A$$

d.h. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) = \lambda(A)$$

ein Element der Menge in $(*)$, womit $\mu(A) \leq \lambda(A)$ ist. Für die andere Richtung (i.e. $\lambda(A) \leq \mu(A)$) zeigen wir folgende Implikation:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{R} \implies \lambda(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$$

Damit wären wir fertig, denn diese A_i sind genau die A_i, mit denen in der Menge in $(*)$ die Summen gebildet werden dürfen. Sind all diese Summen $\geq \lambda(A)$, so sind wir fertig, denn dann muss auch das Infimum all dieser Summen $\geq \lambda(A)$ sein. Dazu betrachten die paarweise disjunkten Mengen

$$B_k = \left(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right) \cap A \in \mathcal{R}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A$ ist; damit folgt nach der σ-Additivität und

Monotonie von λ:

$$\lambda(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$$

und die Behauptung ist gezeigt.

(*ii*) Sei $A \in \mathcal{R}$. Wir wollen zeigen, dass A μ-messbar ist. Sei dafür $S \in \mathcal{P}(X)$ mit $\mu(S) < \infty$ (wäre $\mu(S) = \infty$, so wäre die Eigenschaft $\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$ offensichtlich erfüllt). Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir Mengen $A_i \in \mathcal{R}$, sodass gilt:

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \leq \mu(S) + \varepsilon$$

Solch eine Überdeckung von S existiert per Definition des Infimums, da wegen $\mu(S) < \infty$ die Menge in $(*)$ nicht leer ist. Damit folgt

$$S \cap A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A) \text{ und } S \setminus A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) &\leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A)\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A)\right) \text{ (dank Monotonie)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\underbrace{A_i \cap A}_{\in \mathcal{R}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\underbrace{A_i \setminus A}_{\in \mathcal{R}}) \text{ (dank } \sigma\text{-Subadditivität)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\underbrace{A_i \cap A}_{\in \mathcal{R}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\underbrace{A_i \setminus A}_{\in \mathcal{R}}) \text{ (nach } (i)) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \text{ (dank Additivität von } \lambda \text{ auf } \mathcal{R}) \\
&\leq \mu(S) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Nachdem dies $\forall \varepsilon > 0$ gelten muss, folgt die gewünschte Ungleichung.

□

Bemerkung. (*i*) *Wir bezeichnen μ auch als „von λ induziertes äußeres Maß“, oder als „Carathéodory-Fortsetzung von λ“.*

(*ii*) *Jedes Maß auf einer σ-Algebra ist insbesondere ein Prämaß auf einem Ring, da jede σ-Algebra ein Ring ist. Damit können wir auch insbesondere jedes Maß zu einem äußeren Maß fortsetzen.*

Lemma 1.4.6 (Maximalität der Carathéodory-Fortsetzung)**.** *Sei μ die Carathéodory-Fortsetzung von λ auf $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei ferner $\widetilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\widetilde{\mu} = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Dann gilt $\widetilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$ $\forall E \in \sigma(\mathcal{R})$.*

Beweis. Dank der σ-Additivität gilt $\forall E \in \sigma(\mathcal{R})$ die Implikation

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i, P_i \in \mathcal{R} \implies \widetilde{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i).$$

Das Bilden des Infimums über alle solchen Überdeckung von E liefert genau die Behauptung, denn die Ungleichung überträgt sich auch auf das Infimum:

$$\widetilde{\mu}(E) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) \mid P_i \in \mathcal{R} \ \forall i \in \mathbb{N} \text{ und } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \right\} = \mu(E)$$

□

Satz 1.4.7 (Hopf-Fortsetzung)**.** *Sei $\lambda : [0, \infty]$ ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Diese ist sogar eindeutig, falls λ σ-endlich ist.*

Beweis. Die Existenz folgt sofort aus Satz 1.4.5 (Carathéodory-Fortsetzung) und Satz 1.3.7 (Maß aus äußerem Maß), denn $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathscr{M}(\mu)$. Zur Eindeutigkeit sei $\widetilde{\mu}$ ein weiteres Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\widetilde{\mu} = \lambda = \mu$ auf $\mathcal{R}$. Es seien $A_i \in \mathcal{R}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $A := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathcal{R})$. Dann gilt nach Satz 1.1.7 (Stetigkeitseigenschaften von Maßen):

$$\widetilde{\mu}(A) = \lim_{n \to \infty} \widetilde{\mu} \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \lim_{n \to \infty} \mu \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \mu(A)$$

Nun sei $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu(E) < \infty$. Ferner sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren Mengen $A_i \in \mathcal{R}$ für $i \in \mathbb{N}$ sodass mit $A := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt, dass $E \subset A$ und $\mu(A) \leq \mu(E) + \varepsilon$ ist. Insbesondere gilt: $\mu(A \setminus E) \leq \varepsilon$. Mit $\mu(A) = \widetilde{\mu}(A)$ und Lemma 1.4.6 (Maximalität der Carathéodory-Fortsetzung) folgt nun:

$$\mu(E) \leq \mu(A) = \widetilde{\mu}(A) = \widetilde{\mu}(E) + \widetilde{\mu}(A \setminus E) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nach 1.4.6, da } \mu \text{ maximal ist}}}{\leq} \widetilde{\mu}(E) + \mu(A \setminus E) \leq \widetilde{\mu}(E) + \varepsilon$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt $\mu(E) \leq \widetilde{\mu}(E)$.
Nun sei λ σ-endlich. Dann existieren paarweise disjunkte Mengen $X_n \in \mathcal{R}$ mit $\mu(X_n) <$

∞ und $X := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Für $E \in \sigma(\mathcal{R})$ erhalten wir:

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(\overbrace{E \cap X_n}^{\in\sigma(\mathcal{R})})}_{<\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(E \cap X_n) = \widetilde{\mu}(E)$$

$\square$

Definition. *Ein Maß μ heißt regulär, wenn zu jeder Menge $D \subset X$ eine μ-messbare Menge $E \supset D$ existiert, sodass $\mu(E) = \mu(D)$ ist.*

Satz 1.4.8 (Regularität der Carathéodory-Fortsetzung)**.** *Sei $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$, und sei μ die Carathéodory-Fortsetzung von λ. Sei $D \subset X$. Dann existiert ein $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supset D$ und $\mu(E) = \mu(D)$.*

Beweis. Falls $\mu(D) = \infty$ ist, so wählen wir $E = X$, und es gilt die Behauptung. Sei also $\mu(D) < \infty$. Dann existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung

$$E^{(n)} := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{(n)}$$

von D mit $A_i^{(n)} \in \mathcal{R}$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda\left(A_i^{(n)}\right) \leq \mu(D) + \frac{1}{n}$$

Es sei $E := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$. Damit ist $E \in \sigma(\mathcal{R})$ und $E \supset D$. Es folgt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(D) \leq \mu(E) \leq \mu(E^{(n)}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i^{(n)}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda\left(A_i^{(n)}\right) \leq \mu(D) + \frac{1}{n} < \infty$$

Mit $n \to \infty$ folgt die Behauptung. $\square$

Definition. *Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren:*

$$\overline{\mathscr{A}}_\mu = \{A \cup N \mid A \in \mathscr{A}, N \in T_\mu\}$$

wobei

$$T_\mu = \{N \subset X \mid \exists M \in \mathscr{A} : M \supset N \text{ und } \mu(M) = 0\}$$

ist.

Satz 1.4.9. *Sei λ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$, und sei μ die Carathéodory-Fortsetzung von λ. Dann ist $\mu|_{\mathscr{M}(\mu)}$ die Vervollständigung von $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$, und $\mathscr{M}(\mu)$ ist die* *vervollständigte σ-Algebra von $\sigma(\mathcal{R})$, d.h.*

$$\overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}} = \mathscr{M}(\mu).$$

Beweis. Nach Satz 1.3.7 (Maß aus äußerem Maß) folgt, dass $\mu|_{\mathscr{M}(\mu)}$ ein vollständiges Maß ist. Somit liefert Satz 1.1.10 (Eindeutigkeit der Vervollständigung) sofort, dass $\overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|\sigma(\mathcal{R})} \subset \mathscr{M}(\mu)$ ist. Nun sei $D \in \mathscr{M}(\mu)$ mit $\mu(D) < \infty$. Gemäß Satz 1.4.8 (Regularität) wählen wir $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supset D$ und $\mu(D) = \mu(E)$. Aus der Messbarkeit von D folgt:

$$\mu(D) = \mu(E) = \mu(E \cap D) + \mu(E \setminus D) = \mu(D) + \mu(E \setminus D) \implies \mu(E \setminus D) = 0$$

Da λ σ-endlich ist, existieren wieder disjunkte Mengen $X_n \in \mathcal{R}$ mit $\mu(X_n) < \infty$ und $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Für $D \in \mathscr{M}(\mu)$ setzen wir $D_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n} D \cap X_k$. Es existiert $\forall n \in \mathbb{N}$ eine Menge $E_n \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E_n \supset D_n$ und $\mu(E_n \setminus D_n) = 0$. Wir setzen

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset D$$

mit $E \in \sigma(\mathcal{R})$. Es gilt erneut $\mu(E \setminus D) = 0$. Satz 1.4.8 liefert damit eine Menge $N \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $N \supset E \setminus D$ und $\mu(E \setminus D) = \mu(N) = 0$. Es gilt $D \cap N \subset D$ und $E \setminus N \subset D$ (sei $x \in E \setminus N$; angenommen $x \notin D$; dann ist $x \in E \setminus D \implies x \in N$: $\lightning$), d.h. $(E \setminus N) \cup (D \cap N) \subset D$. Die andere Inklusion folgt ähnlich, also gilt:

$$D = (E \setminus N) \cup (D \cap N) \in \overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}}$$

Damit gilt aber, dass $\mathscr{M}(\mu) \subset \overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}}$ ist. Satz 1.1.10 (die Eindeutigkeit der Vervollständigung) liefert nun, dass die Vervollständigung von $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})} = \mu|_{\mathscr{M}(\mu)}$ ist. Die Eindeutigkeit folgt nun aus Satz 1.4.7 und der Charakterisierung von $\mathscr{M}(\mu)$. $\square$

Folgerung 1.4.10. *Sei $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein σ-endliches Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ mit Carathéodory-Fortsetzung μ. Eine Menge $D \subset X$ ist genau dann μ-messbar, wenn eine der folgenden (äquivalenten) Bedingungen gilt:*

(i) $\exists E \in \sigma(\mathcal{R})$ *mit* $E \supset D$ *und* $\mu(E \setminus D) = 0$.

(ii) $\exists C \in \sigma(\mathcal{R})$ *mit* $C \subset D$ *und* $\mu(D \setminus C) = 0$.

Beweis. Dies wurde bereits im Beweis der vorhergehenden Satzes gezeigt. $\square$

Satz 1.4.11. *Die durch Einschränkung bzw. Fortsetzung gegebenen Abbildungen zwischen σ-endlichen, regulären, äußeren Maßen und den σ-endlichen, vollständigen Maßen auf X sind zueinander invers. Insbesondere sind sie damit isomorph zueinander.*

Beweis. (*i*) Sei λ ein σ-endliches, vollständiges Maß auf einer σ-Algebra $\mathscr{A}$. Dank $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$ folgt aus Satz 1.4.7:

$$\lambda = \lambda^C|_{\sigma(\mathscr{A})} = \lambda^C|_{\mathscr{A}}$$

wobei λ^C die Carathéodory-Fortsetzung von λ bezeichnet. Nun haben wir aber angenommen, dass $\mathscr{A}$ vollständig bzgl. λ ist, d.h. es gilt:

$$\mathscr{A} = \overline{\mathscr{A}}_\lambda = \overline{\mathscr{A}}_{\lambda^C|_{\sigma(\mathscr{A})}} \overset{1.4.9}{=\!=} \mathscr{M}(\lambda^C)$$

(*ii*) Sei nun μ ein σ-endliches, reguläres, äußeren Maß. Wir zeigen, dass $\mu = \lambda^C$ für $\lambda = \mu|_{\mathscr{M}(\mu)}$ ist. Wir haben:

$$\mathscr{M}(\mu) \underset{\substack{\uparrow \\ 1.4.5}}{\subset} \mathscr{M}(\lambda^C) \underset{\substack{\uparrow \\ 1.4.9}}{\subset} \mathscr{M}(\mu)$$

Ferner sind μ und λ^C nach Satz 1.4.8 regulär. Die beiden äußeren Maße stimmen auf $\mathscr{M}(\mu) = \mathscr{M}(\lambda^C)$ überein; damit sind sie gleich.

□

1.5 Weitere Mengensysteme

Halbringe & Inhalte

Definition 1.5.1. *Eine Menge $\mathscr{H} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt Halbring über X, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(*i*) $\emptyset \in \mathscr{H}$.

(*ii*) *Sind $P, Q \in \mathscr{H}$, so ist auch $P \cap Q \in \mathscr{H}$.*

(*iii*) *Sind $P, Q \in \mathscr{H}$, so existieren ein $k \in \mathbb{N}$ und Mengen $P_1, \ldots, P_k \in \mathscr{H}$, sodass gilt:*

$$P \setminus Q = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$$

Beispiel. *Ein Quader ist gegeben durch*

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$$

wobei $I_1, \ldots, I_n$ reelle Intervalle sind. Aus den beiden folgenden Sätzen folgt, dass die Menge aller Quader ein Halbring ist.

Satz 1.5.2. *Die Intervalle in* $\mathbb{R}$ *bilden einen Halbring.*

Beweis. Klar. □

Satz 1.5.3. *Für* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *sei* $\mathscr{H}_i$ *ein Halbring über eine Menge* X_i*. Dann ist*

$$\mathscr{H} := \{P_1 \times \ldots \times P_n \mid P_i \in \mathscr{H}_i \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

ein Halbring über $X := X_1 \times \ldots \times X_n$*.*

Beweis. Wir zeigen, dass das Kreuzprodukt von zwei Halbringen erneut ein Halbring ist, d.h. dass die Aussage für $n = 2$ gilt. Induktiv folgt dann, dass die Aussage auch $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

(i) Es gilt:

$$\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 = \mathscr{H}$$

(ii) Seien $P, Q \in \mathscr{H}$. Dann existieren Darstellungen $P = P_1 \times P_2$ und $Q = Q_1 \times Q_2$ für $P_1, Q_1 \in \mathscr{H}_1$ und $P_2, Q_2 \in \mathscr{H}_2$. Damit gilt:

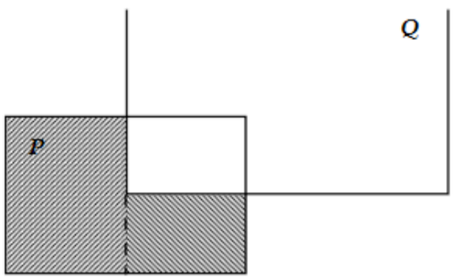
$$P \cap Q = (P_1 \times P_2) \cap (Q_1 \times Q_2) = (P_1 \cap Q_1) \times (P_2 \cap Q_2) \in \mathscr{H}$$

(iii) Seien erneut $P, Q \in \mathscr{H}$ mit $P = P_1 \times P_2$ und $Q = Q_1 \times Q_2$. Es gilt:

$$P \setminus Q = ((P_1 \cap Q_1) \times (P_2 \setminus Q_2)) \cup ((P_1 \setminus Q_1) \times P_2),$$

d.h. $P \setminus Q$ lässt sich als endliche Vereinigung von Mengen in $\mathscr{H}$ ausdrücken.

Folgende Abbildung kann dem Leser helfen, den Beweis zu veranschaulichen:



□

Satz 1.5.4. *Sei* $\mathscr{H}$ *ein Halbring über* X*. Dann ist die Menge*

$$\mathscr{F} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} P_i \mid k \in \mathbb{N}, P_i \in \mathscr{H} \; \forall i \in \{1, \ldots, k\} \right\}$$

ein Ring. Ferner ist $\mathscr{F}$ sogar der kleinste Ring, der $\mathscr{H}$ enthält.

Beweis. Jeder Ring $\mathcal{R} \supset \mathscr{H}$ muss auch $\mathscr{F}$ enthalten. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\mathscr{F}$ ein Ring ist. Wir halten fest, dass $\forall E, F \in \mathscr{F}$ auch $E \cup F \in \mathscr{F}$ ist, da eine Vereinigung von zwei endlichen Vereinigungen von Mengen aus $\mathscr{H}$ wieder eine endliche Vereinigung von Mengen aus $\mathscr{H}$ ist. Sei diese Aussage $(*)$. Seien ferner $E = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ und $F = \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ Mengen in $\mathscr{F}$, wobei $P_i, Q_j \in \mathscr{H}$ sind. Wir rechnen:

$$E \cap F = \left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} Q_j\right) = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{m} \underbrace{(P_i \cap Q_j)}_{\in \mathscr{H}} \in \mathscr{F} \tag{$**$}$$

(*i*) Es gilt sofort $\emptyset \in \mathscr{F}$.

(*ii*) Seien $E = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ und $F = \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ Mengen in $\mathscr{F}$, wobei $P_i, Q_j \in \mathscr{H}$ sind. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
E \setminus F &= \left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} Q_j\right) \\
&= \bigcup_{i=1}^{k} \left(P_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} Q_j\right)\right) \\
&= \bigcup_{i=1}^{k} \bigcap_{j=1}^{m} \underbrace{(\overset{\in \mathscr{H}}{\overset{\downarrow}{P_i}} \setminus \overset{\in \mathscr{H}}{\overset{\downarrow}{Q_j}})}_{\substack{\uparrow \\ =: \bigcup_{l=1}^{n_{i,j}} R_{i,j,l}}} \\
&= \underbrace{\bigcup_{i=1}^{k} \bigcap_{j=1}^{m} \overbrace{\bigcup_{l=1}^{n_{i,j}} R_{i,j,l}}^{\in \mathscr{F}}}_{\in \mathscr{F} \text{ nach } (**)} \in \mathscr{F}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Die Menge $\mathscr{F}$ bezeichnen wir als den* <u>*von $\mathscr{H}$ erzeugten Ring*</u>*. Damit können wir jeden Halbring zu einem Ring erweitern.*

Folgerung 1.5.5. *Sei $\mathscr{H}$ ein Halbring über X und $\mathscr{F}$ der von $\mathscr{H}$ erzeugte Ring. Dann ist $\sigma(\mathscr{H}) = \sigma(\mathscr{F})$.*

Beweis. Es gilt sofort $\sigma(\mathscr{H}) \subset \sigma(\mathscr{F})$, da $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ ist. $\square$

Lemma 1.5.6 (Zerlegungslemma)**.** *Sei $\mathscr{H}$ ein Halbring über X und $\mathscr{F}$ der von $\mathscr{H}$ erzeugte Ring. Sei $F \in \mathscr{F}$; dann existieren paarweise disjunkte Mengen $P_1, \dots, P_k \in \mathscr{H}$ sodass gilt:*

$$F = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$$

Beweis. Idee: schreibe F als Vereinigung von nicht notwendigerweise paarweise disjunkten Mengen $Q_1, \dots, Q_n$, wobei $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, dass $Q_i \in \mathscr{H}$ ist. Dann gilt:

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i = \bigcup_{i=1}^{n} \left(Q_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} Q_j \right)$$

Nun folgt die Behauptung per Induktion aus der tatsache, dass Mengendifferenzen in Halbringen als Vereinigungen von Mengen im Halbring geschrieben werden können. $\square$

Definition 1.5.7. *Sei $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Halbring. Eine Funktion $\lambda : \mathscr{H} \to [0, \infty]$ heißt Inhalt auf $\mathscr{H}$, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(*i*) *Nulltreue: Es gilt $\lambda(\emptyset) = 0$.*

(*ii*) *Additivität: Sind A_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ paarweise disjunkte Mengen in $\mathscr{H}$, sodass $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in H$ ist, so gilt:*

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)$$

Ein Inhalt λ heißt Prämaß auf $\mathscr{H}$, wenn λ auch σ-additiv auf $\mathscr{H}$ ist. Die übrigen Begriffe wie „Subadditivität“, „σ-endlich“, „Nullmenge“, usw. übertragen sich auf Inhalte. Fall $\mathscr{H}$ bereits ein Ring ist, so stimmt diese Definition für Prämaße mit Definition 1.4.3 (Prämaße auf Ringen) überein.

Satz 1.5.8 (Fortsetzung auf den Ring)**.** *Sei λ ein Inhalt auf einem Halbring $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und sei $\mathscr{F}$ der von $\mathscr{H}$ erzeugte Ring. Dann gibt es genau einen Inhalt $\overline{\lambda} : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ mit $\overline{\lambda}(Q) = \lambda(Q)\ \forall Q \in \mathscr{H}$.*

Beweis. Sei $F \in \mathscr{F}$ beliebig. Wir schreiben $F = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ mit $P_i \in \mathscr{H}$, gemäß Lemma 1.5.6. Dann muss gelten:

$$\overline{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda}(P_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i)$$

Ist $F = \bigcup_{i=1}^{l} Q_j$ eine andere disjunkte Zerlegung von F, wobei $Q_j \in \mathscr{H}$ ist, so muss auch gelten:

$$\overline{\lambda}(F) = \sum_{j=1}^{l} \overline{\lambda}(Q_j) = \sum_{j=1}^{l} \lambda(Q_j)$$

Wenn wir zeigen können, dass diese Summen übereinstimmen, dann ist $\overline{\lambda}$ durch diese Summe wohldefiniert und eindeutig festgelegt. Wir wissen, dass für festes $j \in \{1, \ldots, l\}$ die Mengen $P_1 \cap Q_j, P_2 \cap Q_j, \ldots, P_k \cap Q_j$ disjunkt sind, womit

$$Q_j = \bigcup_{i=1}^{k} (Q_j \cap P_i)$$

eine disjunkte Zerlegung von Q_j ist. Analog ist

$$P_i = \bigcup_{j=1}^{l} (P_i \cap Q_j)$$

eine disjunkte Zerlegung von P_i für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$. Damit gilt:

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda(Q_j) = \sum_{j=1}^{l} \underbrace{\sum_{i=1} k\lambda(P_i \cap Q_j)}_{=\lambda(Q_j)} = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\sum_{j=1}^{l} \lambda(P_i \cap Q_j)}_{=\lambda(P_i)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i)$$

Nun müssen wir noch verifizieren, dass $\overline{\lambda}$ ein Inhalt auf ganz $\mathscr{F}$ ist. Sei dafür $F \in \mathscr{F}$. Wir schreiben $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ für disjunkte Mengne $F_1, \ldots, F_k \in \mathscr{F}$. Nach Lemma 1.5.6 existieren zu jedem $i \in \{1, \ldots, k\}$ ein $m_i \in \mathbb{N}$ sowie paarweise disjunkte Mengen $P_1^{(i)}, \ldots, P_{m_i}^{(i)} \in \mathscr{H}$, sodass

$$F_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} P_j^{(i)}$$

ist. Dann gilt:

$$\overline{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\sum_{j=1}^{m_i} \lambda(P_j^{(i)})}_{=\overline{\lambda}(F_i)} = \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda}(F_i)$$

Damit ist $\overline{\lambda}$ ein Inhalt auf $\mathscr{F}$. $\square$

Folgerung 1.5.9 (Monotonie und Subadditivität)**.** *Ein Inhalt λ auf einem Halbring $\mathscr{H}$ ist subadditiv und monoton.*

Beweis. Es gilt für $P, Q \in \mathscr{H}$ mit $P \subset Q$ nach Additivität von λ:

$$\lambda(Q) = \lambda(P) + \lambda(Q \setminus P) \geq \lambda(P)$$

Die Subadditivität folgt analog. $\square$

Beispiel. *Auf dem Halbring der Quader definieren wir das elementargeometrische Volumen* vol^n *durch*

$$\mathrm{vol}^n(Q) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j) \geq 0$$

für $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ *mit* $I_j = I(a_j, b_j)$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

Satz 1.5.10. *Die Funktion* vol^n *aus obigem Beispiel definiert einen Inhalt auf dem Halbring* $\mathscr{H}^n$ *der Quader im* $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Die Nulltreue ist klar. Wir müssen also nun noch die Additivität nachweisen. Für die Additivität führen wir einen Beweis per Induktion nach n. Der Induktionsanfang für einzelne Intervalle ($n = 1$) ist klar (bspw. über das Integral der Funktion $\chi_{I(a,b)} = b - a$, welche als eine Stufenfunktion additiv ist). Sei für den Induktionsschritt die Additivität von vol^{n-1} im $\mathbb{R}^{n-1}$ bereits erwiesen. Sei $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \in \mathscr{H}^n$. Wir definieren für $y \in \mathbb{R}$:

$$Q^y := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x, y) \in Q\} = \begin{cases} I_1 \times \ldots \times I_{n-1} & y \in I_n \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt:

$$\mathrm{vol}^{n-1}(Q^y) = \mathrm{vol}^{n-1}(I_1 \times \ldots \times I_{n-1}) \cdot \chi_{I_n}(y)$$

Sei nun $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathscr{H}^n$ eine disjunkte Zerlegung von Q, d.h. $Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$. Damit gilt $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$Q^y = \left(\bigcup_{i=1}^{k} Q_i\right)^y = \bigcup_{i=1}^{k} Q^y$$

Mit dieser Erkenntnis rechnen wir nun:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}^n\left(\bigcup_{i=1}^k Q_i\right) &= \mathrm{vol}^n(Q) \\
&= \mathrm{vol}^{n-1}(I_1 \times \ldots \times I_{n-1}) \cdot \mathrm{vol}^1(I_n) \\
&= \mathrm{vol}^{n-1}(I_1 \times \ldots \times I_{n-1}) \cdot \int_{\mathbb{R}} \chi_{I_n}(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{vol}^{n-1}(Q^y))(y)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol}^{n-1}\left(\bigcup_{i=1}^k Q_i^y\right)\ \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{I.V.}}{=\!=} \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol}^{n-1}(Q_i^y)\ \mathrm{d}y \\
&= \sum_{i=1}^n \mathrm{vol}^n(Q_i)
\end{aligned}
$$

□

Satz 1.5.11. *Ist $\lambda : \mathscr{H} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf einem Halbring $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$, ist $\mathcal{R}$ der von $\mathscr{H}$ erzeugte Ring und $\overline{\lambda} : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ der eindeutig bestimmte Inhalt auf $\mathcal{R}$ mit $\overline{\lambda}|_{\mathscr{H}} = \lambda$ (gemäß 1.5.8), so ist $\overline{\lambda}$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.*

Beweis. Sei $F = \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{R}$, wobei die Mengen F_i für $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjuntke Mengen in $\mathcal{R}$ sind. Nach Definition 1.5.7 existieren dann $\forall i \in \mathbb{N}$ ein $m_i \in \mathbb{N}$ sowie paarweise disjunkte Mengen $P_1^{(i)}, \ldots, P_{m_i}^{(i)} \in \mathscr{H}$, sodass $F_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} P_j^{(i)}$ ist. Ferner existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $P_1, \ldots, P_m$ mit $F = \bigcup_{j=1}^m P_j$. Damit gilt $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$P_j = \bigcup_{i=1}^\infty (P_j \cap F_i) = \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{k=1}^{m_i} (P_j \cap P_k^{(i)})$$

Da λ ein Prämaß ist, folgt:

$$\lambda(P_j) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^{m_i} \lambda(P_j \cap P_k^{(i)}) = \sum_{i=1}^\infty \overline{\lambda}(P_j \cap F_i)$$

$$\Longrightarrow \overline{\lambda}(F) = \sum_{j=1}^k \lambda(P_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^\infty \overline{\lambda}(P_j \cap F_i) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^k \overline{\lambda}(P_j \cap F_i) = \sum_{i=1}^\infty \overline{\lambda}(F_i)$$

□

Satz 1.5.12. *Sei $\lambda : \mathscr{H} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf dem Halbring $\mathscr{H} \subset \mathcal{P}(X)$. Sei*

$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *das von* λ *erzeugte äußere Maß, d.h. es gilt:*

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathscr{H}, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

Dann ist μ *eine Fortsetzung von* λ.

Beweis. Sei $\mathcal{R}$ der von $\mathscr{H}$ erzeugte Ring. Damit ist $\overline{\lambda}$ (aus Satz 1.5.11) ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Für $F \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\overline{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i)$$

wobei Q_i eine disjunkte Zerlegung von F ist. Nachdem $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{R}$ ist, und $\lambda = \overline{\lambda}$ auf $\mathscr{H}$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}
\inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(Q_k) \mid Q_k \in \mathscr{H}, E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \right\} &\geq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lambda}(F_i) \mid F_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\} \\
&= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda(Q_{i,j}) \mid F_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} Q_{i,j}, Q_{i,j} \in \mathscr{H}, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_i} Q_{i,j} \right\} \\
&\geq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(Q_k) \mid Q_k \in \mathscr{H}, E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \right\}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Die Carathéodory-Fortsetzung ist ein reguläres äußeres Maß, welches auf* $\mathscr{M}(\mu)$ *vollständig ist. Der Maßraum* $(X, \mu, \mu|_{\mathscr{M}(\mu)})$ *ist die Vervollständigung des Maßraumes* $(X, \sigma(\mathscr{H}), \mu|_{\sigma(\mathscr{H})})$. *Diese Vervollständigung ist eindeutig. Insbesondere gilt nach Folgerung 1.5.5:*

$$D \subset X \text{ ist } \mu\text{-messbar} \iff \exists C \in \sigma(\mathscr{H}) : C \subset D \text{ und } \mu(D \setminus C) = 0$$

Satz 1.5.13. *Sei* λ *ein Inhalt auf einem Ring* $\mathcal{R}$, *und seien* $A_i \in \mathcal{R}$ *für* $i \in \mathbb{N}$. *Wir betrachten folgende Aussagen:*

(i) λ *ist ein Prämaß auf* $\mathcal{R}$.

(ii) *Ist* $A_i \subset A_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ *und* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$, *so gilt:*

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \lambda(A_i)$$

(iii) Ist $A_i \supset A_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $\lambda(A_1) < \infty$, und $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$, so gilt:

$$\lambda\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \lambda(A_i)$$

(iv) Ist $A_i \supset A_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $\lambda(A_1) < \infty$, und $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, so gilt:

$$\lim_{i\to\infty} \lambda(A_i) = 0$$

Es gilt: $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.
Falls λ endlich ist (d.h. $\lambda(A) < \infty$ $\forall A \in \mathcal{R}$), so sind die Aussagen $(i) - (iv)$ äquivalent.

Beweis. Der Beweis der Implikationen $(i) \Rightarrow (ii)$ und $(ii) \Rightarrow (iii)$ folgt identisch zum Beweis der Aussagen (i) und (ii) von Satz 1.1.7.
„$(iii) \Rightarrow (iv)$": Per Definition eines Rings gilt $\emptyset \in \mathcal{R}$. Damit rechnen wir:

$$\lim_{i\to\infty} \lambda(A_i) \overset{(iii)}{=\!=} \lambda\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lambda(\emptyset) = 0$$

„$(ii) \Rightarrow (i)$": Seien die Mengen $A_n \in \mathcal{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Dann erfüllt die Folge $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ für $n \in \mathbb{N}$ die Voraussetzungen aus (ii), und es gilt:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Da λ als Inhalt endlich additiv ist, folgt:

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{(ii)}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$$

also erfüllt λ die σ-Additivität. Damit haben wir $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ gezeigt.
Sei nun λ endlich.
„$(iv) \Rightarrow (i)$": Sei $A_i \in \mathcal{R}$ eine monoton wachsende Folge von Mengen, sodass $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$ ist. Damit ist die Folge $B_n := A \setminus A_n$ monoton fallend, und es gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Nach (iv) gilt dann $\lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) = 0$. Nun gilt aber $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda(B_n) = \lambda(A \setminus A_n) \overset{\substack{\lambda \text{ endlich} \\ \downarrow}}{=} \lambda(A) - \lambda(A_n)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Damit erfüllt λ die σ-Additivität, d.h. λ ist ein Prämaß. $\square$

Bemerkung. *Die Eigenschaft (iv) wird auch als* $\emptyset$*-Stetigkeit bezeichnet.*

1.6 Das n-dimensionale Lebesguemaß

Lemma 1.6.1. *Der elementargeometrische Inhalt* $\operatorname{vol}^n : \mathscr{H}^n \to [0, \infty]$ *ist ein Prämaß auf dem Halbring* $\mathscr{H}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Sei $P \in \mathscr{H}^n$ und $P_i \in \mathscr{H}^n$ (für $i \in \mathbb{N}$) eine disjunkte Zerlegung von P. Nun ist vol^n nach 1.5.8 ein Inhalt auf dem Ring der Figuren. Aufgrund der Monotonie von vol^n gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}^n(P_i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{vol}^n(P_i) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{vol}^n\left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\right) \leq \operatorname{vol}^n(P)$$

Für die umgekehrte Ungleichung sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen für $i \in \mathbb{N}$ eine offene Menge $Q_i \supset P_i$ und eine abgeschlossene Mengen $Q \subset P$, sodass gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}^n(Q_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}^n(P_i) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \operatorname{vol}^n(P) < \operatorname{vol}^n(Q) + \frac{\varepsilon}{2}$$

(unter der Annahme, dass P ein endlicher, beschränkter Quader ist). Dies können wir trotz der unendlichen Summe erreichen, indem wir $\operatorname{vol}^n(Q_1) < \operatorname{vol}^n(P_1) + \frac{\varepsilon}{4}$ setzen, sowie $\operatorname{vol}^n(Q_2) < \operatorname{vol}^n(P_2) + \frac{\varepsilon}{8}$, usw., wodurch die Abstände eine geometrische Reihe mit aufsummiertem Limes $\frac{\varepsilon}{2}$ bilden. Nach dem Satz von Heine-Borel existieren endlich viele Quader $Q_1, \ldots, Q_k$, die gemeinsam Q überdecken. Damit folgt:

$$\operatorname{vol}^n(P) < \operatorname{vol}^n(Q) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{vol}^n(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}^n(P_i) + \varepsilon$$

Also gilt die Behauptung. Für unendliche Quader folgt die Behauptung analog, da entweder eines der P_i unendliches Volumen haben muss, oder die Summe der Volumen divergiert. □

Definition 1.6.2 (Lebesguemaß). *Das n-dimensionale äußere Lebesguemaß einer Menge* $E \subset \mathbb{R}^n$ *ist gegeben durch:*

$$\lambda^n(E) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}^n(Q_k) \mid Q_k \in \mathscr{H}^n, E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right\}$$

Die Einschränkung $\lambda^n|_{\mathscr{M}(\lambda^n)}$ *heißt n-dimensionales Lebesguemaß, welches wir ebenfalls mit* λ^n *bezeichnen.*

Bemerkung. λ^n *ist (als ein äußeres Maß) regulär, bzw. vollständig als Maß auf der* σ*-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen* $\mathscr{M}(\lambda^n)$.

Lemma 1.6.3. *Betrachte für $k \in \mathbb{N}$ die Familie der Würfel:*

$$\mathscr{W}_k := \{Q_{k,m} := 2^{-k}(m + [0,1]^n) \mid m \in \mathbb{Z}^n\}$$

Zu $E \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir:

$$F_k(E) := \bigcup\{Q \in \mathscr{W}_k \mid Q \subset E\}, F^k(E) := \bigcup\{Q \in \mathscr{W}_k \mid Q \cap E \neq \emptyset\}$$

Dann gilt:

(*i*) *$\forall k \in \mathbb{N}$ sind $F_k(E)$ und $F^k(E)$ abgeschlossene Vereinigungen abzählbar vieler kompakter Quader mit disjunkten Inneren.*

(*ii*) *$F_1(E) \subset F_2(E) \subset \ldots \subset E$ und $F^1(E) \supset F^2(E) \supset \ldots \supset E$.*

(*iii*) *Es gilt $\forall k \in \mathbb{N}$:*

$$F_k(E) \supset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 2^{-k} \cdot \sqrt{n}\}$$

$$F^k(E) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, E) \leq 2^{-k} \cdot \sqrt{n}\}$$

(*iv*) *Es gilt:*

$$E^0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(E) \subset E \text{ und } \overline{E} \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} F^k(E) \supset E$$

Beweis. (*i*) Die Menge $\mathscr{W}_k$ besitzt abzählbar viele Elemente, da $\mathbb{Z}$ (und damit auch $\mathbb{Z}^n$) abzählbar ist. Die Würfel in $\mathscr{W}_k$ sind kompakt, mit paarweise disjunkten inneren und beschränkte Mengen E werden nur von endlich vielen solchen Würfeln geschnitten. Damit sind die Mengen $F_k(E)$ und $F^k(E)$ abgeschlossen, da sie jeweils eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen sind.

(*ii*) Jeder Würfel $Q_{k,m}$ ist die Vereinigung von 2^n Würfeln der Form $Q_{k+1,2m+l}$ für $l \in \{0,1\}^n$, und es gilt:

$$Q_{k,m} \subset E \implies Q_{k+1,2m+l} \subset E \; \forall l \in \{0,1\}^n$$

Also gilt $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$Q \in F_k(E) \implies Q \in \mathscr{W}_k, Q \subset E \implies Q \in F_{k+1}(E) \implies F_k(E) \subset F_{k+1}(E)$$

Ferner gilt:

$$\exists l \in \{0,1\}^n : Q_{k+1,2m+l} \cap E \neq \emptyset \implies Q_{k,m} \cap E \neq \emptyset$$

Woraus analog folgt, dass $F^k(E) \supset F^{k+1}(E)\ \forall k \in \mathbb{N}$ ist. Damit gilt die Behauptung (ii).

(iii) Nun sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 2^{-k}\sqrt{n}$. Dann existiert ein Würfel $Q \in \mathscr{W}_k$ mit $x \in \mathbb{Q}$. Da dann $\operatorname{diam}(Q) = 2^{-k}\sqrt{n}$ ist, muss sofort der gesamte Würfel Q in E liegen. Damit ist $Q \subset E$, also ist $Q \in F_k(E)$. Sei andererseits $x \in F^k(E)$. Dann muss ein Würfel $Q \in \mathscr{W}_k$ existieren, der x enthält, und sich mit E schneidet. Damit folgt:

$$\operatorname{dist}(x, E) \leq \operatorname{diam}(Q) \leq 2^{-k}\sqrt{n}$$

(iv) Folgt sofort aus (iii) und den Definitionen von E^0 und $\overline{E}$.

□

Lemma 1.6.4. *Die Borelmengen $\mathscr{B}^n$ des $\mathbb{R}^n$ sind die vom Halbring der Quader, $\mathscr{H}^n$, dem Ring der Figuren, $\mathscr{F}^n$, dem System der abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{C}^n$, und dem System der offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{O}^n$, erzeugte σ-Algebra, d.h.:*

$$\mathscr{B}^n = \sigma(\mathscr{O}^n) = \sigma(\mathscr{H}^n) = \sigma(\mathscr{F}^n) = \sigma(\mathscr{C}^n)$$

Beweis. Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist entweder offen, oder es lässt sich als abzählbarer Schnitt von offenen Intervallen U_k (für $k \in \mathbb{N}$) schreiben, d.h.:

$$I = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$$

Damit liegt $I \in \mathscr{B}^1$. Für einen Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \in \mathscr{H}^n$ schreiben wir

$$I_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{j,k}\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

und erhalten:

$$Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} (I_{1,k} \times \ldots \times I_{n,k}) \in \mathscr{B}^n$$

Es folgt $\mathscr{H}^n \subset \mathscr{B}^n$. Es gilt ebenfalls $\mathscr{F}^n \subset \mathscr{B}^n$, da Figuren endliche Vereinigungen von Quadern in $\mathscr{H}^n$ sind, und $\mathscr{B}^n$ als eine σ-Algebra stabil unter abzählbaren Vereinigungen ist. Sei nun $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Nach Lemma 1.6.3 (iv) gilt:

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(U)$$

Nun sind die Mengen $F_k(U)$ aber abzählbare Vereinigungen von kompakten Würfeln, d.h. auch U ist eine abzählbare Vereinigung von kompakten Würfeln. Damit gilt:

$$\mathscr{O}^n \subset \sigma(\mathscr{H}^n)$$

$$\Longrightarrow \sigma(\mathscr{O}^n) = \mathscr{B}^n \subset \sigma(\mathscr{H}^n) \subset \sigma(\mathscr{F}^n)$$

Da für $C \in \mathscr{C}^n$ gilt, dass $C = \mathbb{R}^n \setminus U \ \forall U \in \mathscr{O}^n$ ist, folgt:

$$\sigma(\mathscr{C}^n) = \sigma(\mathscr{O}^n)$$

□

Satz 1.6.5 (λ^n-Messbarkeit)**.** *Für das äußere Lebesguemaß λ^n gilt:*

(*i*) $\mathscr{B}^n \subset \mathscr{M}(\lambda^n)$

(*ii*) *Zu $E \subset \mathbb{R}^n$ existiert eine Menge $B \in \mathscr{B}^n$, sodass $E \subset B$ und $\lambda^n(B) = \lambda^n(E)$ ist.*

(*iii*) $\lambda^n(K) < \infty$ *für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Beweis. (*i*) Nach Satz 1.5.12 (Carathéodory-Fortsetzung) gilt $\mathscr{H}^n \subset \mathscr{M}(\lambda^n)$, also $\mathscr{B}^n = \sigma(\mathscr{H}^n) \subset \mathscr{M}(\lambda^n)$ nach Lemma 1.6.4 und Satz 1.3.7 (äußeres Maß zu Maß).

(*ii*) Gilt nach Regularität (Satz 1.4.8), denn $\mathscr{B}^n = \sigma(\mathscr{H}^n)$ ist.

(*iii*) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist K beschränkt, d.h. K kann durch einen beschränkten Quader $[-a, a]^n$ (für ein $a \in \mathbb{R}, a > 0$) überdeckt werden. Da $\lambda^n = \mathrm{vol}^n$ auf $\mathscr{H}^n$ ist, gilt dank Monotonie von λ^n:

$$\lambda^n(K) \leq \lambda^n([-a, a]^n) = \mathrm{vol}^n([-a, a]^n) = (2a)^n < \infty$$

□

Lemma 1.6.6 (Approximation)**.** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$.*

(*i*) *Es gilt:*

$$\lambda^n(E) = \inf\{\lambda^n(U) \mid U \text{ offen}, E \subset U\}$$

(*ii*) *Falls E messbar ist, so gilt ferner:*

$$\lambda^n(E) = \sup\{\lambda^n(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subset E\}$$

Beweis. (*i*) Offensichtlich gilt

$$\lambda^n(E) \leq \inf\{\lambda^n(U) \mid U \text{ offen}, E \subset U\},$$

denn die Mengen U sind ja valide Überdeckungen von E. Für die andere Richtung sei o.B.d.A. $\lambda^n(E) < \infty$, denn für $\lambda^n(E) = \infty$ ist die Ungleichung trivial. Per Definition des Infimums existiert zu $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ mit Quadern $P_i \in \mathscr{H}^n$, sodass gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}^n(P_i) < \lambda^n(E) + \varepsilon$$

Wir können ferner annhemen, dass diese Quader offen sind, da wir jeden Quader P_i um $\frac{\varepsilon}{2^i}$ vergrößern können, und dann das offene innere davon betrachten. Dadurch wird E nach wie vor von den Quadern überdeckt, und das gesamte Volumen erhöht sich höchstens um $\frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist aber auch

$$U := \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$$

offen, und es gilt:

$$\lambda^n(U) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}^n(P_i) < \lambda^n(E) + \varepsilon$$

Da dies $\forall \varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung (i).

(ii) Offensichtlich gilt

$$\lambda^n(E) \geq \sup\{\lambda^n(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subset E\}$$

nach Monotonie von λ^n, da jedes K eine Teilmenge von E ist. Für die andere Richtung sei zunächst E beschränkt. Sei $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $K_0 \supset E$. Mit demselben Argument wie in (i) können wir schließen, dass zu $\varepsilon > 0$ eine offenen Menge $U \supset K_0 \setminus E$ existiert, sodass gilt:

$$\lambda^n(U) < \lambda^n(K_0 \setminus E) + \varepsilon \overset{\substack{E \text{ messbar} \\ \downarrow}}{=} \lambda^n(K_0) - \lambda^n(E) + \varepsilon$$

Allerdings ist die Menge $K := K_0 \setminus U \subset K_0 \setminus (K_0 \setminus E) = E$ kompakt, und wegen der λ^n-Messbarkeit von U (schließlich ist U offen) folgt:

$$\lambda^n(K) = \lambda^n(K_0) - \lambda^n(K_0 \cap U) \geq \lambda^n(K_0) - \lambda^n(U) > \lambda^n(E) - \varepsilon$$

Dies gilt $\forall \varepsilon > 0$, also ist $\lambda(K_0) \geq \lambda^n(K) \geq \lambda^n(E)$. Damit gilt (ii) für beschränkte Mengen E. Sei nun E eine beliebige, messbare Menge, und seien $E_j := E \cap \{|x| \leq j\}$

für $j \in \mathbb{N}$. Diese Mengen sind beschränkt und λ^n-messbar. Damit gilt:

$$\lambda^n(E_j) = \sup\{\lambda^n(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subset E_j\} \leq \sup\{\lambda^n(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subset E\}$$

Allerdings gilt $\lambda^n(E_j) \xrightarrow{j\to\infty} \lambda^n(E)$ dank Satz 1.1.7, also gilt die Behauptung (ii) auch für beliebige messbare Mengen E.

□

Satz 1.6.7 (Messbarkeit bzgl. λ^n). *Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann λ^n-messbar, wenn eine der beiden folgenden (äquivalenten) Bedingungen erfüllt ist:*

(i) $\exists E \in \mathscr{B}^n : E \supset D, \lambda^n(E \setminus D) = 0.$

(ii) $\exists C \in \mathscr{B}^n : C \subset D, \lambda^n(D \setminus C) = 0.$

Wir können

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \text{ und } C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

für offene Mengen U_i und abgeschlossene Mengen A_i schreiben.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ λ^n-messbar. Wir schreiben:

$$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \text{ mit } D_j := \{x \in D \mid j-1 \leq |x| < j\} \ \forall j \in \mathbb{N}$$

Nach Lemma 1.6.6 existieren offene Mengen $U_{i,j}$ und kompakte Mengen $K_{i,j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$, sodass $\forall i, j \in \mathbb{N}$ gilt, dass $K_{i,j} \subset D_j \subset U_{i,j}$ ist, und dass

$$\lambda^n(U_{i,j}) < \lambda^n(D_j) + \frac{2^{-j}}{i}, \ \lambda^n(K_{i,j}) > \lambda^n(D_j) - \frac{2^{-j}}{i} \tag{$*$}$$

ist. Dann sind die Mengen

$$U_i := \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{i,j} \text{ und } A_i := \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j}$$

$\forall i \in \mathbb{N}$ abgeschlossen, und es gilt $A_i \subset D \subset U_i$. Nun definieren wir:

$$E := \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \text{ und } C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

und erhalten $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$\lambda^n(E \setminus D) \leq \lambda^n(U_i \setminus D) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(U_{i,j} \setminus D) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^n(U_{i,j}) - \lambda^n(D_j)) \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{i}$$

Da dies $\forall i \in \mathbb{N}$ gilt, gilt bereits $\lambda^n(E \setminus D) = 0$. Andererseits gilt analog $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$\lambda^n(D \setminus C) \leq \lambda^n(D \setminus A_i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(D_j \setminus K_{i,j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(D_j) - \lambda^n(K_{i,j}) \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{i}$$

womit auch $\lambda^n(D \setminus C) = 0$ ist.
Die andere Richtung ist klar. $\square$

Satz 1.6.8 (Lusin)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\lambda^n(A) < \infty$. Sei f eine reellwertige, auf A λ^n-messbare Funktion. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K = K_\varepsilon \subset A$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) Es gilt $\lambda^n(A \setminus K) < \varepsilon$.

(ii) $f|_K$ ist stetig.

Beweis. Durch Fortsetzung von f durch Null außerhalb des Definitionsgebietes von f können wir annehmen, dass f auf ganz A definiert ist (denn durch diese Fortsetzung bleiben die Messbarkeitskriterien aus Lemma 1.2.5 erhalten, d.h. f ist nach wie vor eine messbare Funktion). Nun definieren wir für jedes $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ folgende Intervalle:

$$B_{i,2k+1} := \left(\frac{k}{i}, \frac{k+1}{i}\right], \ B_{i,2k} := \left(-\frac{k}{i}, -\frac{k-1}{i}\right]$$

Sei nun $i \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann sind die Mengen $B_{i,j}$ für $j \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Intervalle, und es gilt:

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} B_{i,j} = \mathbb{R}$$

Ferner ist die Länge jedes solchen Intervalls genau $\frac{1}{i}$. Damit sind die Mengen

$$A_{i,j} := f^{-1}(B_{i,j})$$

$\forall j \in \mathbb{N}$ messbar, da wir das Urbild eines Intervalls $[a, b)$ unter einer messbaren Funktion als $\{f \geq a\} \cap \{f < b\}$ schreiben können, welches als ein Schnitt von (nach Lemma 1.2.5) messbaren Mengen selbst messbar ist. Ferner gilt:

$$A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} A_{i,j}$$

Nach Lemma 1.6.6 existieren dann kompakte Mengen $K_{i,j} \subset A_{i,j}$ mit

$$\lambda^n(A_{i,j} \setminus K_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+j+1}} \qquad (*)$$

Damit folgt:

$$\lambda^n\left(A\setminus\bigcup_{l=1}^{\infty}K_{i,l}\right)=\lambda^n\left(\bigcup_{j=0}^{\infty}A_{i,j}\setminus\bigcup_{l=0}^{\infty}K_{i,l}\right)=\lambda^n\left(\bigcup_{j=0}^{\infty}(A_{i,j}\setminus K_{i,j})\right)$$
$$\leq\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^n(A_{i,j}\setminus K_{i,j})\overset{(*)}{<}\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\cdot\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j}_{=2}=\frac{\varepsilon}{2^i}$$

Damit gilt nach der Stetigkeit von Maßen:

$$\lim_{N\to\infty}\lambda^n\left(A\setminus\bigcup_{j=0}^{N}K_{i,j}\right)=\lambda^n\left(A\setminus\bigcup_{j=0}^{\infty}K_{i,j}\right)$$

Somit existiert ein $N(i)$ mit

$$\lambda^n\left(A\setminus\bigcup_{j=0}^{N(i)}K_{i,j}\right)<\frac{\varepsilon}{2^i}\tag{$**$}$$

Die Menge

$$D_i:=\bigcup_{j=1}^{N(i)}K_{i,j}$$

ist, als endliche Vereinigung von Kompakta, ebenfalls kompakt. Sei nun $b_{i,j}\in B_{i,j}$ beliebig, und sei $g_i:D_i\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit $g_i(x)=b_{i,j}\ \forall x\in K_{i,j},\ j\leq N(i)$. Die Mengen $K_{i,1},\ldots,K_{i,N(i)}$ sind kompakt und disjunkt; damit existiert ein $\delta>0$, sodass all diese Mengen mindestens Abstand δ voneinander haben. Damit ist $g_i:D_i\to\mathbb{R}$ stetig, denn es existieren keine Unstetigkeitsstellen, da die Definitionsgebiete $K_{i,j}$ voneinander getrennt sind. Damit gilt $|f(x)-g_i(x)|\leq\frac{1}{2^i}\ \forall x\in D_i$. Nun definieren wir:

$$K:=\bigcap_{i=1}^{\infty}D_i$$

Diese Menge ist als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen selbst kompakt, und es gilt:

$$\lambda^n(A\setminus K)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^n(A\setminus D_i)\overset{(**)}{<}\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=\varepsilon$$

Folglich konvergiert die Funktionenfolge $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auf K gleichmäßig gegen $f|_K$: damit ist $f|_K$ stetig. $\square$

Definition 1.6.9. *Ein äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt* <u>*Borelmaß*</u>*, wenn gilt:*

(i) Alle Borelmengen sind μ-messbar.

(ii) Es gilt $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$.

Bemerkung. *Das Lebesguemaß ist ein Borelmaß. Für $E \subset \mathbb{R}^n$ ist auch $\lambda^n \llcorner E$ ein Borelmaß.*

Definition 1.6.10. *Ein äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt Translationsinvariant, wenn gilt:*

$$\mu(E + a) = \mu(E)\ \forall E \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$$

Bemerkung. *Das Lebesguemaß ist Translationsinvariant.*

Lemma 1.6.11. *Ist μ ein translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, so ist jede Koordinatenhyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = c\}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$, $c \in \mathbb{R}$ eine μ-Nullmenge.*

Beweis. Sei $Q = [0,1]^n$ und $F = \{x \in Q \mid x_i = 0\}$. Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist $F + a$ abgeschlossen, und damit μ-messbar. Nun sei $\{s_1, \ldots, s_k\} \subset [0,1]$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $s_l \neq s_j\ \forall l \neq j$. Dann gilt:

$$k \cdot \mu(F) = \sum_{j=1}^{k} \mu(s_j e_i + F) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} s_j e_i + F\right) \leq \mu(Q) < \infty$$

Dies gilt $\forall k \in \mathbb{N}$, also muss $\mu(F) = 0$ sein, denn ansonsten ließe sich ein $k \in \mathbb{N}$ finden, sodass $k \cdot \mu(F) > \mu(Q)$ ist, da $\mu(Q)$ nicht unendlich ist. H ist aber die Vereinigung abzählbar vieler verschobener Mengen F, womit auch $\mu(H) = 0$ ist. $\square$

Satz 1.6.12. *Sei μ ein translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt mit $\vartheta := \mu([0,1]^n)$:*

$$\mu(E) = \vartheta \cdot \lambda^n(E)$$

für alle λ^n-messbaren Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei $Q_{k,j} = 2^{-k} \cdot (j + [0,1]^n)\ \forall k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z}^n$. Dann ist $[0,1]^n$ die Vereinigung von $2^{n \cdot k}$ solcher Würfel; seien diese $\{Q_{k,j} \mid j \in J_k\}$, wobei

$$J_k = \{j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \leq j_i \leq 2^k - 1\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

ist. Diese Würfel sind (einmal abgesehen von den Koordinatenhyperebenen auf den Überschneidungen der Würfeln, die wir ignorieren können, da es sich bei ihnen um endlich viele messbare Mengen von Maß 0 handelt). Mit Lemma 1.6.11 folgt damit:

$$\mu([0,1]^n) = \sum_{j \in J_k} \mu(Q_{k,j}), \lambda^n([0,1]^n) = \sum_{j \in J_k} \lambda^n(Q_{k,j})$$

Da nach Translationsinvarianz von μ und λ^n die Maße all dieser Teilwürfel gleich sind, folgt:

$$\vartheta = \frac{\mu([0,1]^n)}{\underbrace{\lambda^n([0,1]^n)}_{=1}} = \frac{2^{nk} \cdot \mu(Q_{k,j})}{2^{nk} \cdot \lambda^n(Q_{k,j})} = \frac{\mu(Q_{k,j})}{\lambda^n(Q_{k,j})}$$

Mit Lemma 1.6.3 folgt für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mu(U) = \vartheta \cdot \lambda^n(U)$$

da wir jede solche Mengen mithilfe von Gitterfiguren approximieren können. Die Behauptung gilt damit auch für alle Quader, und folglich ebenfalls für alle λ^n-messbaren Mengen (dank Satz 1.4.4, der Eindeutigkeit der Maßfortsetzung). $\square$

Lemma 1.6.13. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitzkonstante Λ bzgl. der Maximumsnorm $||\cdot||_\infty$, d.h. es gilt:*

$$||f(x) - f(y)||_\infty \leq \Lambda \cdot ||x - y||_\infty \; \forall x, y \in U \tag{$*$}$$

Dann gilt:

$$\lambda^n(f(E)) \leq \Lambda^n \cdot \lambda^n(E) \; \forall E \subseteq U$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $\lambda^n(E) < \infty$. Wir setzen:

$$Q(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0||_\infty < \rho\} \; x_0 \in \mathbb{R}^n, \rho > 0$$

Wir haben $Q(x_0, \rho) \subset U \implies f(Q(x_0, \rho)) \subset Q(f(x_0), \Lambda\rho)$ dank $(*)$. Nach Lemma 1.6.6 (Approximationslemma) existiert eine offene Menge $V \supset E$, sodass $\lambda^n(V) \leq \lambda^n(E) + \varepsilon$ ist. Sei o.B.d.A. $V \subset U$ (ist $\lambda^n(E) < \lambda^n(U) + \varepsilon$, so wähle $V = U$, da U offen ist; ansonsten finden wir eine entsprechende offene Menge $V \subset U$). Wir betrachten weiter Würfel Q_j (für $j \in \mathbb{N}$) mit

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j = V$$

wobei Q_j paarweise disjunkte Innere besitzen. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\lambda^n(f(E)) &\leq \lambda^n(f(V))\\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(f(Q_j))\\ &\leq \Lambda^n \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(Q_j)\\ &= \Lambda^n \cdot \lambda^n(V)\\ &= \Lambda^n \cdot (\lambda^n(E) + \varepsilon)\end{aligned}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung. □

Satz 1.6.14. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ eine Funktion. Dann gilt:*

(*i*) *$N \subset U$ ist eine λ^n-Nullmenge $\implies$ $f(N)$ ist eine λ^n-Nullmenge.*

(*ii*) *$E \subset U$ ist λ^n-messbar $\implies$ $f(E)$ ist λ^n-messbar.*

Beweis. Nach Lemma 1.6.3 finden wir kompakte Würfel K_i, sodass

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

ist, also gilt:

$$N = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cap N.$$

Da $f|K_i$ Lipschitz-stetig ist, folgt die Behauptung (i) aus Satz 1.6.13. Für (ii) nehmen wir an, dass E beschränkt ist (ansonsten betrachten wir stattdessen $E_m = \{x \in E \mid |x| \leq m\}$ für jedes $m \in \mathbb{R}$). Dann existieren nach Satz 1.6.7 Kompakte Mengen A_j (für $j \in \mathbb{N}$) und eine λ^n-Nullmenge N mit

$$E = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \cup N.$$

Da die Bilder $f(A_i)$ ebenfalls kompakt sind und $\lambda^n(f(N)) = 0$ ist (nach (i)), folgt die Messbarkeit von f. □

Satz 1.6.15. *Sei $S \in O(n)$ (d.h. S ist eine orthogonale $n \times n$-Matrix), und sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

$$\lambda^n(S(E) + a) = \lambda^n(E) \; \forall E \subset \mathbb{R}^n$$

Beweis. Die Translationsinvarianz von λ^n ist bereits bekannt; damit können wir annehmen, dass $a = 0$ ist. Sei zunächst $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $T := S^{-1}$. Wir betrachten das Bildmaß

$$\mu = \lambda^n \circ S : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty], E \mapsto \mu(E) = \lambda^n(S(E)).$$

Das Maß μ ist ein translationsinvariantes Borelmaß, denn S ist eine C^1-Funktion, also ist μ nach Satz 1.6.14 ein Borelmaß, und μ ist translationsinvariant, da $\forall b \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu(E + a) = \lambda^n(S(E + a)) = \lambda^n(S(E) + \underset{\in \mathbb{R}^n}{\underset{\uparrow}{Sa}}) = \lambda(S(E)) = \mu(E)$$

Nach Satz 1.6.12 folgt nun für alle λ^n-messbaren Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mu(E) = \vartheta(S) \cdot \lambda^n(E) \text{ wobei } \vartheta(S) = \lambda^n(S([0,1]^n)) \in [0, \infty)$$

Für allgemeine Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$ folgt die Aussage nun mit Lemma 1.6.6, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \lambda^n(S(E)) \\ &= \inf\{\lambda^n(V) \mid S(E) \subset V, V \text{ ist offen}\} \\ &= \inf\{\lambda^n(S(U)) \mid E \subset U, U \text{ ist offen}\} \\ &= \inf\{\mu(U) \mid E \subset U, U \text{ ist offen}\}\end{aligned}$$

Da alle Mengen U oben als offen vorausgesetzt sind, gilt die Behauptung bereits für alle diese U, d.h. es folgt:

$$\lambda^n(S(E)) = \vartheta(S) \cdot \lambda^n(E)$$

Für $S \in O(n)$ sei $E = B_1(0)$ die Einheitskugel um den Ursprung bzgl. der Euklidischen Norm. Dann gilt $S(B_1) = B_1$, da Kugeln rotationsinvariant sind, und orthogonale Matrizen abstandserhaltend sind. Da alle orthogonalen Matrizen insbesondere invertierbar sind, gilt:

$$\vartheta(S) \cdot \lambda^n(B_1(0)) = \mu(B_1(0)) = \lambda^n(S(B_1(0))) = \lambda^n(B_1(0))$$

Damit muss $\vartheta(S) = 1$ sein, also gilt die Behauptung. □

Lemma 1.6.16. *Sei $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Dann existiert eine Diagonalmatrix*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_j > 0$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ und Matrizen $T_1, T_2 \in O(n)$, sodass $S = T_1 \Lambda T_2$ ist.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 1.6.17 (Lineare Transformationsformel). *Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

$$\lambda^n(S(E)) = |\det(S)| \cdot \lambda^n(E) \;\forall E \subset \mathbb{R}^n$$

Beweis. Falls $\det(S) = 0$ ist, ist S nicht invertierbar, d.h. $\dim(\mathrm{Bild}(S)) < n$. Damit ist $S(E)$ für jedes $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge einer $n-1$-dimensionalen Hyperebene H. Damit ist $\lambda^n(S(E)) \leq \lambda^n(H)0$, d.h. $\lambda^n(S(E)) = 0$. Sei also $|\det(S)| \neq 0$. Nach Satz 1.6.14 genügt es zu zeigen, dass

$$\vartheta(S) = |\det(S)|$$

ist, wobei ϑ das ϑ aus Satz 1.6.12 ist. Für eine Diagonalmatrix Λ mit strikt positiven Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rechnen wir:

$$\theta(\Lambda) = \lambda^n(\Lambda([0,1]^n)) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det \Lambda = |\det(\Lambda)|$$

Mit der Polarzerlegung $S = T_1 \Lambda T_2$ für $T_1, T_2 \in O(n)$ folgt dank Lemma 1.6.15 die Aussage für $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. □

2 Integration

Zur Erinnerung: sei im Folgenden $(X, \mathscr{A}, \mu)$ immer ein Maßraum. Ggf. erweitern wir μ zum entsprechenden äußeren Maß. Wir betrachten typischerweise numerische Funktionen. Eine solche Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar (auf $D \subset X$) wenn $D \in \mathscr{A}$ ist, und $\{f > s\} \in \mathscr{A}\; \forall s \in \mathbb{R}$ ist. Eine Funktion $f : \widetilde{D} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt μ-messbar auf $D \in \mathscr{A}$, wenn, wenn $\widetilde{D} \in \mathscr{A}$ ist, $\mu(D \setminus \widetilde{D}) = 0$ ist, und f $\mathscr{A}|_{\widetilde{D}}$-messbar ist.

Beispiel. *Sei $E \in \mathscr{A}$. Dann ist*

$$\chi_E : X \to \overline{\mathbb{R}}, \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

messbar.

2.1 Das Lebesgueintegral

Definition 2.1.1. *Sei $(Y, \mathscr{C})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $f : Y \to \mathbb{R}$ heißt $(\mathscr{C})$-Treppenfunktion, wenn ein $m \in \mathbb{N}$, Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ und Mengen $A_1, \dots, A_m \in \mathscr{C}$ existieren, sodass gilt:*

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$$

Satz 2.1.2. *Sei $(Y,\mathscr{C})$ ein messbarer Raum und sei $f : Y \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine monoton wachsende Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Treppenfunktionen, welche für $n \to \infty$ punktweise in Y gegen f konvergiert.*

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1,\dots,m\cdot 2^m\}$ setzen wir:

$$F_{m,k} = \left\{x \in Y \mid \frac{k-1}{2^m} \le f(x) < \frac{k}{2^m}\right\}$$

Wir definieren ferner für jedes $m \in \mathbb{N}$:

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^m} & x \in F_{m,k} \\ m & x \in Y \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m\cdot 2^m} F_{m,k} \end{cases}$$

Die Funktionen $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sind Treppenfunktionen, und $\forall x \in Y$ gilt:

$$f_m(x) \to f(x) \text{ und } f_m(x) \text{ ist monoton wachsend}$$

□

Wir wollen nun ein Integral über Funktionen konstruieren. Zunächst definieren wir das Integral über eine charakteristische Funktion χ_E als:

$$\int_X \chi_E \, \mathrm{d}\mu = \mu(E)$$

Betrachten wir nun eine allgemeinere, messbare Funktion $f : X \to [0,\infty]$ mit

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \chi_{A_i},$$

wobei wir für f eine Darstellung wie in Satz 2.1.2 nutzen. Unsere Idee ist, das Intergral von f über X wie folgt zu definieren:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \mu(A_j)$$

Allerdings ist die Darstellung als Linearkombination aus Satz 2.1.2 nicht unbedingt eindeutig, womit dieses Integral noch nicht wohldefiniert ist; dieses Problem gilt es nun lösen.

Lemma 2.1.3. *Seien $A_1,\dots,A_m,B_1,\dots,B_n \in \mathscr{A}$, sodass die Mengen $A_1,\dots,A_m$ und die Mengen $B_1,\dots,B_n$ untereinander paarweise disjunkt sind. Seien ferner $\alpha_1,\dots,\alpha_m$,*

$\beta_1, \dots, \beta_n \in [0, \infty)$ *beliebig. Dann gilt folgende Implikation:*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} \leq \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \chi_{B_j} \implies \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \mu(A_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \mu(B_j)$$

Beweis. Wir definieren:

$$\alpha_0 := 0 =: \beta_0 \ ; \ A_0 := X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i \ ; \ B_0 := X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

Für $i \in \{0, \dots, m\}, j \in \{0, \dots, n\}$ gilt damit entweder $A_i \cap B_j = \emptyset$ oder $\alpha_i \leq \beta_j$. Damit folgt:

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \beta_j \cdot \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \cdot \mu(B_j)$$

□

Bemerkung. *Damit folgt insbesondere:*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \chi_{B_j} \implies \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \mu(B_j)$$

Womit obiges Problem gelöst ist, denn damit ist der Wert des Integrals unabhängig von der Darstellung von f als Linearkombination.

Bemerkung. *Jede Treppenfunktion f besitzt eine Darstellung*

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$$

mit paarweise disjunkten Mengen A_j (wären diese nicht disjunkt, so könnten wir sie in disjunkte Mengen aufteilen, wodurch wir immer noch nur endlich viele Mengen erhalten würden).

Definition 2.1.4. *Sei $D \in \mathscr{A}$, $f : D \to [0, \infty)$ eine Treppenfunktion mit Darstellung*

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$$

mit paarweise disjunkten Mengen A_j und $\alpha_j \geq 0 \ \forall j \in \{1, \dots, m\}$. Dann setzen wir:

$$\int_D f \ \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \mu(A_j)$$

Definition 2.1.5. *Seien $D \in \mathscr{A}$ und $f : D \to [0, \infty)$ eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion. Dann setzen wir:*

$$\int_D f \; \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_D s \; \mathrm{d}\mu \mid s \text{ ist eine Treppenfunktion mit } 0 \leq s \leq f \right\}$$

Für eine beliebige $\mathscr{A}$-messbare Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir das Lebesgueintegral von f über D durch:

$$\int_D f \; \mathrm{d}\mu := \int_D f^+ \; \mathrm{d}\mu - \int_D f^- \; \mathrm{d}\mu$$

wobei

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f^- = -f + f^+$$

ist, falls mindestens eines der beiden Integrale auf der rechten Seite endlich ist.

Bemerkung. (*i*) *Ist f eine Treppenfunktion, so stimmen die Definitionen überein.*

(*ii*) *Falls $\mu(N) = 0$ für ein $N \in \mathscr{A}$ ist, so gilt:*

$$\int_N f \; \mathrm{d}\mu = 0$$

(*iii*) *Für $M \in \mathscr{A}$ folgt:*

$$\int_M f \; \mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \chi_M \; \mathrm{d}\mu = \int_M f|_M \; \mathrm{d}\mu$$

Daher genügt es fortan, nur Integrale über ganz X zu betrachten. Für den Beweis siehe anschließendes Lemma.

(*iv*) *Aus dieser Definition ergibt sich sofort, dass dieses Integral monoton ist (d.h. $f(x) \leq g(x) \; \forall x \in D \implies \int_X f \; \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \; \mathrm{d}\mu$).*

Lemma. *Sei f eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion auf X und $D \subset X$ mit $\mu(X \setminus D) = 0$. Dann gilt:*

$$\int_X f \; \mathrm{d}\mu = \int_D f|_D \; \mathrm{d}\mu$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für Treppenfunktionen. Sei also f eine Treppenfunktion mit folgender Darstellung:

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}, \; A_1, \ldots, A_k \in \mathscr{A}$$

Seien o.B.d.A. $A_1, \ldots, A_m \subset D$ und $A_{m+1}, \ldots, A_k \subset X \setminus D$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$\forall x \in D, i \in \{m+1, \dots, k\}$:

$$x \notin A_i \implies \chi_{A_i}(x) = 0 \implies f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \underbrace{\chi_{A_i}(x)}_{=0 \text{ für } i>m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$$

$$\implies f|_D = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$$

Damit rechnen wir:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \mu(A_i) + \sum_{i=m+1}^{k} \alpha_i \cdot \underbrace{\mu(A_i)}_{\substack{=0 \\ \text{da } \mu(A_i) \leq \mu(X \setminus D) = 0}} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \int_D f|_D \, \mathrm{d}\mu$$

Sei nun f eine beliebige, $\mathscr{A}$-messbare Funktion. Sei s_n (gemäß Satz 2.1.2) eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_X f \, \mathrm{d}\mu &= \sup \left\{ \int_X s \, \mathrm{d}\mu \mid s \text{ ist eine Treppenfunktion auf } X \text{ mit } 0 \leq s \leq f \right\} \\
&= \sup \left\{ \int_D s|_D \, \mathrm{d}\mu \mid s \text{ ist eine Treppenfunktion auf } X \text{ mit } 0 \leq s \leq f \right\} \\
&= \sup \left\{ \int_D s|_D \, \mathrm{d}\mu \mid s \text{ ist eine Treppenfunktion auf } D \text{ mit } 0 \leq s \leq f|_D \right\} \\
&= \int_D f|_D \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

□

Satz 2.1.6 (Monotone Konvergenz)**.** *Seien $f_n : X \to [0, \infty)$ für $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{A}$-messbare Funktionen, sodass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion f konvergiert, und sodass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist (d.h. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}, x \in X$). Dann gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass f als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen $\mathscr{A}$-messbar ist (nach Satz 1.2.8). Aus Definition 2.1.5 folgt, dass

$$\left(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine monoton wachsende Folge ist, deren Grenzwert in $[0, \infty]$ wir mit α bezeichnen.

Ferner gilt $f_n \leq f \; \forall n \in \mathbb{N}$. Damit gilt:

$$\alpha \leq \int_X f \; \mathrm{d}\mu$$

Ist $\alpha = \infty$, so sind wir fertig. Sei also $\alpha \in [0, \infty)$. Sei s eine Treppenfunktion mit $0 \leq s \leq f$. Wir zeigen, dass

$$\int_X s \; \mathrm{d}\mu \leq \alpha$$

ist, denn damit folgt

$$\int_X f \; \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_X s \; \mathrm{d}\mu \mid s \text{ Treppenfunktion}, 0 \leq s \leq f \right\} \leq \alpha,$$

also wäre der Satz gezeigt.

Schritt 1: Sei $\tau \in (0,1)$ und sei $E_n := \{x \in X \mid f_n(x) \geq \tau \cdot s(x)\}$. Dann gilt $E_n \in \mathscr{A}$ und $E_n \subset E_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$, sowie

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X.$$

Damit folgt für jedes $A \in \mathscr{A}$ nach den Stetigkeitseigenschaften von Maßen:

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_n \cap A) = \mu(A) \tag{$*$}$$

Schritt 2: Wir nutzen gemäß Satz 2.1.2 die Darstellung

$$s = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot \chi_{B_j}$$

mit paarweise disjunkten Mengen $B_j \in \mathscr{A}$. Dann gilt:

$$\int_X f_n \; \mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} f_n \; \mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} \tau \cdot s \; \mathrm{d}\mu = \tau \cdot \sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot \mu(B_j \cap E_n)$$

Schritt 3: Wir betrachten nun in obiger Ungleichung den Grenzwert für $n \to \infty$. Mit $(*)$, sukzessive angewendet auf $A = B_j$, ergibt sich dadurch:

$$\alpha \geq \tau \cdot \sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot \mu(B_j) = \tau \cdot \int_X s \; \mathrm{d}\mu$$

Da $\tau \in (0,1)$ beliebig nahe an 1 gewählt werden kann, folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 2.1.7. *Seien $f_1, f_2; X \to [0,\infty)$ $\mathscr{A}$-messbare Funktionen. Dann gilt:*

$$\int_X (f_1 + f_2)\ \mathrm{d}\mu = \int_X f_1\ \mathrm{d}\mu + \int_X f_2\ \mathrm{d}\mu$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für Treppenfunktionen. Seien also f_1 und f_2 $\mathscr{A}$-messbare Treppenfunktionen. Nach Satz 1.2.9 ist auch $f_1 + f_2$ $\mathscr{A}$-messbar, und damit integrierbar. Wir nutzen gemäß Definition 2.1.1 die folgenden Darstellungen:

$$f_1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \chi_{A_i},\ f_2 = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \cdot \chi_{A_i}$$

Dabei nehmen wir o.B.d.A. an, dass beide Darstellungen dieselben Mengen $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{A}$ nutzen. Damit besitzt $f_1 + f_2$ folgende Darstellung:

$$f_1 + f_2 = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i) \cdot \chi_{A_i}$$

Mit dieser Darstellung erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \int_X f_1 + f_2\ \mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i) \cdot \mu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \mu(A_i) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \cdot \mu(A_i) \\ &= \int_X f_1\ \mathrm{d}\mu + \int_X f_2\ \mathrm{d}\mu \qquad (*) \end{aligned}$$

Seien nun f_1, f_2 beliebige Funktionen. Seien (gemäß Satz 2.1.2) s_n und t_n monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen, sodass $s_n \xrightarrow{n\to\infty} f_1$ und $t_n \xrightarrow{n\to\infty} f_2$ punktweise gilt. Damit gilt auch $s_n + t_n \xrightarrow{n\to\infty} f_1 + f_2$ punktweise. Damit rechnen wir:

$$\begin{aligned} \int_X f_1\ \mathrm{d}\mu + \int_X f_2\ \mathrm{d}\mu &\overset{2.1.6}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\ \mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X t_n\ \mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X s_n\ \mathrm{d}\mu + \int_X t_n\ \mathrm{d}\mu \right) \\ &\overset{(*)}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_X s_n + t_n\ \mathrm{d}\mu \\ &\overset{2.1.6}{=\!=} \int_X f_1 + f_2\ \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Falls f nur μ-messbar auf X ist, d.h. f ist auf einer Menge $D \in \mathscr{A}$ mit*

$\mu(X \setminus D) = 0$ *definiert und f ist $\mathscr{A}|_D$-messbar, so setzen wir:*

$$\int_X f \; \mathrm{d}\mu := \int_D f \; \mathrm{d}\mu$$

Lemma 2.1.8. *Seien $f_1, f_2 : X \to [0, \infty)$ μ-messbare Funktionen. Dann gilt:*

$$\int_X (f_1 + f_2) \; \mathrm{d}\mu = \int_X f_1 \; \mathrm{d}\mu + \int_X f_2 \; \mathrm{d}\mu$$

Beweis. Per Definition der μ-Messbarkeit existieren Mengen $D_1, D_2 \in \mathscr{A}$, sodass f_1 auf D_1 und f_2 auf D_2 definiert ist, und sodass gilt: $\mu(X \setminus D_1) = \mu(X \setminus D_2) = 0$. Damit ist auch $X \setminus (D_1 \cap D_2) = 0$, und wir rechnen:

$$\int_X f_1 + f_2 \; \mathrm{d}\mu = \int_{D_1 \cap D_2} f_1 + f_2 \; \mathrm{d}\mu \overset{2.1.7}{=\!=} \int_{D_1 \cap D_2} f_1 \; \mathrm{d}\mu + \int_{D_1 \cap D_2} f_2 \; \mathrm{d}\mu$$

Andererseits gilt

$$\int_{D_1 \cap D_2} f_1 \; \mathrm{d}\mu = \int_{D_1} f_1 \; \mathrm{d}\mu,$$

da $\mu(D_1 \setminus (D_1 \cap D_2)) = \mu(D_1 \setminus D_2) = \mu((X \setminus D_2) \setminus (X \setminus D_1)) = \mu(X \setminus D_2) - \mu(X \setminus D_1) = 0$ ist, d.h. die Differenz zwischen den Mengen D_1 und $D_1 \cap D_2$ ist eine Nullmenge, d.h. diese Differenz ändert das Integral nicht. Analog fahren wir für f_2 fort, womit die Behauptung gilt. □

Definition 2.1.9. *Die Menge aller μ-messbaren, numerischen Funktionen f auf X, deren Integral definiert ist (dabei darf dieses Integral auf $\pm\infty$ sein), bezeichnen wir mit $\mathscr{L}^*(\mu)$ (oder vereinfachend: $\mathscr{L}^*$). Weiter setzen wir:*

$$\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(\mu) := \left\{ f \in \mathscr{L}^*(\mu) \mid \int_X f \; \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Lemma 2.1.10. *Sei $g \in \mathscr{L}^*$ und f eine μ-messbare Funktion mit $f = g$ μ-f.ü.; dann ist $f \in \mathscr{L}^*(\mu)$, und es gilt:*

$$\int_X f \; \mathrm{d}\mu = \int_X g \; \mathrm{d}\mu$$

Falls μ ein vollständiges Maß ist, so müssen wir f nicht als μ-messbar annehmen.

Beweis. Seien f auf $B \in \mathscr{A}$ und g auf $A \in \mathscr{A}$ definiert, sodass $\mu(X \setminus A) = \mu(X \setminus B) = 0$ ist. Dann sei $D \subset A \cap B$, sodass $f = g$ auf D ist, und sodass $\mu(X \setminus D) = 0$ ist. Dann gilt analog zum Beweis von Lemma 2.1.9:

$$\int_X g \; \mathrm{d}\mu = \int_A g \; \mathrm{d}\mu = \int_D g \; \mathrm{d}\mu = \int_D f \; \mathrm{d}\mu = \int_B f \; \mathrm{d}\mu = \int_X f \; \mathrm{d}\mu$$

Falls μ vollständig ist, so liefert Lemma 1.2.12 bereits die μ-Messbarkeit von f, weswegen wir diese nicht explizit fordern müssen. $\square$

Lemma 2.1.11 (Chebychev-Ungleichung). *Sei $f : X \to [0, \infty]$ eine μ-messbare Funktion mit $\int_X f \ \mathrm{d}\mu < \infty$. Dann gilt $\forall s \in (0, \infty]$:*

$$\mu(\{f \geq s\}) \leq \begin{cases} \frac{1}{s} \cdot \int_X f \ \mathrm{d}\mu & s \in (0, \infty) \\ 0 & s = \infty \end{cases}$$

Beweis. Fall 1: $s < \infty$. Wir betrachten (auf dem üblichen $D \in \mathscr{A}$) die folgende Funktion:

$$0 \leq s\chi_{\{f \geq s\}} \leq f$$

Durch Integration folgt die Behauptung dank der Stetigkeitseigenschaften von Maßen:

$$s \cdot \int_X \chi_{\{f \geq s\}} \ \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \ \mathrm{d}\mu \implies \mu(\{f \geq s\}) = \int_X \chi_{\{f \geq s\}} \ \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{s} \cdot \int_X f \ \mathrm{d}\mu$$

Fall 2: $s = \infty$. In diesem Fall ist $\{f \geq s\} = \{f = \infty\}$. Angenommen, $\lambda := \mu(\{f = \infty\}) > 0$. Dann ist für jedes $\eta \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$s_\eta : X \to [0, \infty), s_\eta(x) := \begin{cases} 0 & f(x) < \infty \\ \eta & f(x) = \infty \end{cases} = \eta \cdot \chi_{\{f = \infty\}}$$

eine Treppenfunktion mit $s \leq f$. Folglich gilt:

$$\int_X f \ \mathrm{d}\mu \geq \int_X s_\eta \ \mathrm{d}\mu = \eta \cdot \mu(\{f = \infty\}) = \eta \cdot \lambda$$

Dies gilt $\forall \eta \in \mathbb{R}$, also muss wegen $\lambda \neq 0$ bereits $\int_X f \ \mathrm{d}\mu = \infty$ gelten. $\lightning$

$\square$

Folgerung 2.1.12. *Sei $f \in \mathscr{L}^*(\mu)$.*

(i) Ist $\int_X f \ \mathrm{d}\mu < \infty$ (bzw. $\int_X f \ \mathrm{d}\mu > -\infty$), so gilt $f < \infty$ (bzw. $f > -\infty$) μ-f.ü.

(ii) Falls $f \geq 0$ und $\int_X f \ \mathrm{d}\mu = 0$ ist, so ist $f = 0$ μ-f.ü.

Beweis. (*i*) Wir nutzen die Darstellung $f = f^+ - f^-$. Es gilt $\int_X f \ \mathrm{d}\mu < \infty$, also wissen wir, dass auch $\int_X f^+ \ \mathrm{d}\mu < \infty$ ist, denn wäre $\int_X f^+ \ \mathrm{d}\mu = \infty$, so wäre $\int_X f^- \ \mathrm{d}\mu$ endlich (sonst wäre das Integral von f nicht definiert, d.h. $f \notin \mathscr{L}^*(\mu)$); aber dann wäre $\int_X f \ \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \ \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \ \mathrm{d}\mu = \infty -$ (reelle Zahl) $= \infty$, was ein Widerspruch wäre. Damit liefert die Chebychev-Ungleichung dank $f^+ \geq 0$:

$\mu(\{f^+ = \infty\}) = 0$. Wegen $f(x) = \infty \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow f^+(x) = f(x) = \infty$ ist $\{f = \infty\} \subseteq \{f^+ = \infty\}$, also folgt $\mu(\{f = \infty\}) = \infty$, d.h. $f < \infty$ μ-fast-überall.

(*ii*) Da f nicht-negativ ist, liefert die Chebychev-Ungleichung:

$$\mu(\{f \geq s\}) \leq \frac{1}{s} \cdot \int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0 \ \forall s \in (0, \infty)$$

$$\Longrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = \mu(\{f > 0\}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \overset{1.1.7}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right)}_{=0} = 0$$

□

Folgerung 2.1.13. *Seien $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$.*

(*i*) *Falls $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0 \ \forall A \in \mathscr{A}$ ist, so gilt $f = 0$ μ-f.ü.*

(*ii*) *Falls $\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A g \, \mathrm{d}\mu \ \forall A \in \mathscr{A}$ ist, so gilt $f = g$ μ-f.ü.*

Beweis. (*i*) Sei $B := \{f \geq 0\}$. Dann gilt:

$$0 = \int_B f \, \mathrm{d}\mu = \int_B f^+ \, \mathrm{d}\mu$$

d.h. $f^+ = 0$ μ-f.ü.; wir gehen analog für f^- vor, und erhalten damit, dass $f = 0$ μ-f.ü. ist.

(*ii*) Sei $h := (f - g)^+$. Dann gilt $\forall A \in \mathscr{A}$:

$$0 \leq \int_A h \, \mathrm{d}\mu = \int_A \cap\{h > 0\} f - g \, \mathrm{d}\mu \leq 0$$

Somit ist $(f-g)^+ = 0$ μ-f.ü., d.h. $f - g \leq 0$ μ-f.ü.; wiederholen wir dies für $(f-g)^-$, so erhalten wir die Behauptung.

□

Satz 2.1.14. *Es gilt:*

(*i*) *Für $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, und es gilt:*

$$\int_X \alpha f + \beta g \, \mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \beta \cdot \int_X g \, \mathrm{d}\mu$$

(*ii*) *Ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, so ist auch $|f| \in \mathscr{L}^1(\mu)$, und es gilt:*

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$$

(*iii*) *Aus* $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *folgt* $\max\{f, g\} \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *und* $\min\{f, g\} \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

(*iv*) *Sei* f μ*-messbar und* $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *mit* $|f| \leq g$. *Dann ist auch* $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, *und es gilt:*

$$\int_X f \; \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| \; \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \; \mathrm{d}\mu$$

Beweis. (*i*) Seien $f \in \mathscr{L}^1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir zeigen zunächst folgende Gleichung:

$$\int_X \alpha f \; \mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int_X f \; \mathrm{d}\mu$$

Für $\alpha = 0$ und für Treppenfunktionen f ist die Sache klar. Für allgemeines $f \geq 0$ (welches o.B.d.A. auf ganz X definiert ist) gilt:

$$\begin{aligned}
\int_X \alpha f \; \mathrm{d}\mu &= \sup\left\{\int_X s \; \mathrm{d}\mu \mid 0 \leq s \leq \alpha f, s \text{ Treppenfunktion}\right\} \\
&= \sup\left\{\alpha \cdot \int_X \frac{s}{\alpha} \; \mathrm{d}\mu \mid 0 \leq \frac{s}{\alpha} \leq f, s \text{ Treppenfunktion}\right\} \\
&= \alpha \cdot \sup\left\{\int_X t \; \mathrm{d}\mu \mid 0 \leq t \leq f, t \text{ Treppenfunktion}\right\} \\
&= \alpha \cdot \int_X f \; \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Diese Rechnung ist auch für $\alpha < 0$ gültig, denn $(\alpha f)^- = (-\alpha) f$. Allgemein wie immer mit $f = f^+ - f^-$. Dank dieser Erkenntnis genügt es für (*i*) nun, den Fall $\alpha = \beta = 1$ zu behandeln. Seien also $f, g \in \mathscr{L}^1$. Wir setzen $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ und $h = f + g$. Nach Folgerung 2.1.12 ist g μ-f.ü. definiert, und ist damit μ-messbar. Dank $h = h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ gilt $h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$. Da dies messbare, nicht-negative Funktionen sind, liefert Lemma 2.1.9:

$$\int_X h^+ \; \mathrm{d}\mu + \int_X f^- \; \mathrm{d}\mu + \int_X g^- \; \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \; \mathrm{d}\mu + \int_X g^+ \; \mathrm{d}\mu + \int_X h^- \; \mathrm{d}\mu$$

Da $0 \leq h^+ = (f+g)^+ \leq f^+ + g^+$ ist, ist $\int_X h^+ \; \mathrm{d}\mu$ endlich (analog für h^-); damit ist (*i*) gezeigt.

(*ii*) Wir nuzten $|f| = f^+ + f^-$, und rechnen:

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f \; \mathrm{d}\mu\right| \overset{(i)}{=\!=} \left|\int_X f^+ \; \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \; \mathrm{d}\mu\right| &\leq \left|\int_X f^+ \; \mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_X f^- \; \mathrm{d}\mu\right| \\
&= \left|\int_X f^+ \; \mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_X f^- \; \mathrm{d}\mu\right| = \int_X |f| \; \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

(*iii*) Folgt sofort aus $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.

(*iv*) Ist f μ-messbar, so ist auch f^+ μ-messbar, und es gilt $0 \leq f^+ \leq g$. Es folgt:

$$0 \leq \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

Damit ist $f^+ \in \mathscr{L}^1$. Analog folgt auch $f^- \in \mathscr{L}^1$; damit ist $f = f^+ - f^- \in \mathscr{L}^1$ nach (i). Mit (ii) folgt nun:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \underset{\substack{\uparrow \\ f = f^+ - f^- \leq f^+ \leq |f|}}{\leq} \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu$$

□

Folgerung 2.1.15. *Seien f, g μ-messbare Funktionen mit $\int_X f \, \mathrm{d}\mu > -\infty$. Dann gilt folgende Implikation:*

$$f \leq g \ \mu\text{-f.ü.} \implies \int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu$$

Beweis. Für $f, g \geq 0$ folgt die Aussage sofort aus Definition 2.1.5 (und der Tatsache, dass die Punkte, für die $f > g$ ist, für die Integrale unerheblich sind, da sie eine Nullmenge bilden). Ansonsten gilt:

$$\{g^- > f^-\} \cup \{f^+ > g^+\} \subset \{f > g\}$$

wobei wir annehmen, dass alle obigen Mengen in $\mathscr{A}$ liegen. Damit gilt $0 \leq g^- \leq f^-$ und $0 \leq f^+ \leq g^+$ μ-f.ü., und somit:

$$0 \leq \int_X g^- \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty \text{ und } \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g^+ \, \mathrm{d}\mu$$

$$\implies \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_X -f^- \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_X -g^- \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu$$

□

2.2 Konvergenzsätze

Wir wollen wissen, wann folgende Gleichheit gilt:

$$\int_X \lim_{k \to \infty} f_k \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k \to \infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu$$

Wir beobachten zunächst, dass punktweise Konvergenz allein hierfür nicht genügt. Betrachte beispielsweise die folgenden Funktion für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$f_k := \frac{k}{2} \cdot \chi_{[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]}$$

Dann ist der punktweise Limes dieser Funktionenfolge $\forall x \in \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases} =: f(x)$$

Allerdings gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f_k \, \mathrm{d}\lambda^1 = 1 \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ aber } \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda^1 = 0$$

Satz 2.2.1 (Levi; monotone Konvergenz)**.** *Seien f, f_n für $n \in \mathbb{N}$ μ-messbare Funktion auf X mit $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ μ-f.ü., $f_{n+1} \geq f_n$, und $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu > -\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

Beweis. Für $\mathscr{A}$-messbare, nicht-negative Funktionen haben wir dies bereits in Satz 2.1.6 bewiesen. Aus $f_n \geq f_1$ und $f_1 \in \mathscr{L}^*$ folgt aus Folgerung 2.1.16, dass auch $f_n \in \mathscr{L}^*$ ist. Falls ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \infty$ existiert, so ist die Aussage nach Definition 2.1.5 klar (denn dann ist auch $\int_X f_k \, \mathrm{d}\mu = \infty \ \forall k \geq n$). Seien also $f_n \in \mathscr{L}^1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Damit gilt $f_1^- \in \mathscr{L}^1$, und dank Satz 2.1.14 folgt, dass auch $g_n := f_n + f_1^- \in \mathscr{L}^1$ ist. Die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nun aber eine monoton wachsende Folge nicht-negativer (da $\forall x \in X$: $f_n(x) < 0 \Rightarrow f_1(x) \leq f_n(x) < 0 \Rightarrow g_n(x) = f_n(x) + f_1^-(x) = f_n(x) + (-f_1(x)) \geq 0$), intergrierbarer Funktionen mit $g_n \xrightarrow{n \to \infty} f + f_1^-$ μ-f.ü., weswegen ein $A \in \mathscr{A}$ existiert, sodass $\mu(X \setminus A) = 0$ ist, und sodass gilt:

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = f(x) + f_1^-(x) \ \forall x \in A$$

Satz 2.1.6 angewendet auf $X = A$ liefert nun:

$$\lim_{n \to \infty} \int_A g_n \, \mathrm{d}\mu = \int_A f + f_1^- \, \mathrm{d}\mu$$

Da die Funktionen $g_n, f_n, f_1 \in \mathscr{L}^1$ sind, erhalten wir:

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_1^- \, \mathrm{d}\mu = \int_X f + f_1^- \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_1^- \, \mathrm{d}\mu \qquad (*)$$

Nachdem $f^- \leq f_1^- \in \mathscr{L}^1$ ist, und $f + f_1^- = f^+ + (f_1^- - f^-)$ ist, gilt ferner nach Satz

2.1.15:

$$\int_X f + f_1^- \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_X f_1^- - f^- \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu + \int_X f_1^- \, \mathrm{d}\mu$$
$$= \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X f_1^- \, \mathrm{d}\mu$$

$$\overset{(*)}{\implies} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \left(\int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X f_1^- \, \mathrm{d}\mu \right) - \int_X f_1^- \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

□

Bemerkung. (*i*) *Ist μ ein vollständiges Maß, so müssen wir nicht annehmen, dass f μ-messbar ist, da dies automatisch für punktweise Grenzwerte μ-messbarer Funktionen gilt.*

(*ii*) *Wir benötigen die Bedingung der punktweisen Konvergenz nicht – diese folgt automatisch aus der Monotonität der Folge.*

Folgerung 2.2.2. *Für nicht-negative, μ-messbare Funktionen f_n gilt:*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Beweis. Folgt sofort aus Satz 2.2.1. □

Lemma 2.2.3 (Lemma von Fatou)**.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-messbarer Funktionen auf X und $g \in \mathscr{L}^1$. Falls $f_n \geq g$ μ-f.ü. für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt:*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Beweis. Sei jeweils f_n auf $D_n \in \mathscr{A}$ definiert, sodass $\mu(X \setminus D_n) = 0$ ist. Wir definieren

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \ ; \ f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

Für $g_n = \inf_{j\geq n} f_j$, definiert auf $\bigcap_{j=n}^{\infty} D_j$, gilt $g_{n+1} \geq g_n$ auf D und $\lim_{n\to\infty} g_n = f$. Mit Satz 2.2.1 folgt nun:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

□

Satz 2.2.4 (Majorisierte Konvergenz)**.** *Seien f, f_n für $n \in \mathbb{N}$ μ-messbare Funktionen auf X, sodass $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ μ-f.ü. gilt. Es existiere ferner eine nicht-negative Funktion*

$g \in \mathscr{L}^1$, sodass $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \leq g$ μ-f.ü. gilt. Dann ist $f \in \mathscr{L}^1$, und es gilt:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Es gilt sogar:

$$||f - f_n||_{\mathscr{L}^1(\mu)} = \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt $|f| = \lim_{n\to\infty} |f_n| \leq g$ μ-f.ü.; da $g \in \mathscr{L}^1$ ist, folgt mit Satz 2.1.15 $f, f_n \in \mathscr{L}^1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Die Folge $2g - |f - f_n| \geq 0$ konvergiert μ-f.ü. punktweise gegen $2g$. Damit liefert Lemma 2.2.3:

$$\begin{aligned}\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} 2g - |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X 2g - |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

$$\implies \limsup_{n\to\infty} \left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_k| \, \mathrm{d}\mu \leq 0$$

□

Bemerkung. *Ist μ ein vollständiges Maß, so müssen wir nicht annehmen, dass f μ-messbar ist, da dies automatisch für punktweise Grenzwerte μ-messbarer Funktionen gilt.*

Folgerung 2.2.5. *Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-messbarer Funktionen und $g \in \mathscr{L}^1$. Falls die Reihe*

$$\sum_{j=1}^{\infty} h_j$$

μ-f.ü. konvergiert, und

$$\sup \left| \sum_{j=1}^{\infty} H_j \right| \leq g$$

μ-f.ü. gilt, so gilt:

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} h_j \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X h_j \, \mathrm{d}\mu$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 2.2.4. □

Bemerkung. *Wir vergleichen nun Riemann- und Lebesgueintegral mit Maß $\mu = \lambda^1$ auf $\mathbb{R}$. Sei dafür $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für eine Treppenfunktion (gemäß Analysis I) mit einer Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots <$*

$x_N = b$ *bekommen wir Ober- und Untersummen*

$$\sum_{j=1}^{N}(x_j - x_{j-1}) \cdot \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) \text{ und } \sum_{j=1}^{N}(x_j - x_{j-1}) \cdot \inf x \in [x_{j-1}, x_j] f(x)$$

Wir nennen f Riemann-integrierbar, wenn

$$\sup\left\{\int_a^b \varphi \ \mathrm{d}x \mid \varphi \text{ Treppenfunk.}, \varphi \leq f\right\} = \inf\left\{\int_a^b \psi \ \mathrm{d}x \mid \psi \text{ Treppenfunk.}, \psi \geq f\right\}$$

ist.

Satz 2.2.6 (Riemann-Integrierbarkeit)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion auf $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$f \text{ Riemann-integrierbar} \iff \lambda^1(\{x \in I \mid f \text{ nicht stetig in } x\}) = 0$$

In diesem Fall ist f auch Lebesgue-messbar, und die Integrale stimmen überein.

Beweis. Sei

$$N_s(f) = \{x \in I \mid \limsup_{y\to x} f(y) - \liminf_{y\to x} f(y) \geq s\}$$

die Menge der Sprungstellen von f.

„$\Rightarrow$“: Sei $\varphi \leq f \leq \psi$ mit Treppenfunktionen φ und ψ (im Sinne der Analysis I; damit sind dies insbesondere auch Treppenfunktionen im Sinne der Analysis III). Sei nun $x \in N_s(f)$; dann gilt $\psi(x) - \varphi(x) \geq s$. Als Treppenfunktionen sind φ und ψ Lebesgue-integrierbar, also gilt:

$$\int_I \psi(x) \ \mathrm{d}x - \int_I \varphi(x) \ \mathrm{d}x \geq \lambda^1(N_s(f)) \cdot s$$

Falls für ein $s > 0$ gilt, dass $\lambda^1(N_s(f)) > 0$ ist, so ist damit die Funktion f nicht Riemann-integrierbar.

„$\Leftarrow$“: Sei nun f λ^1-f.ü. stetig. Dann seien $\tau_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,N_j})$ Zerlegungen mit Feinheit

$$\delta_j = \max_{1\leq i\leq N_j} |x_{j,i} - x_{j,i-1}| \xrightarrow{j\to\infty} 0$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$. Wir definieren ferner $\forall j \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_j(x) = \inf_{y\in I_{j,i}} f(y) \ \forall i \in \{1, \dots, N_j\}, x \in I_{j,i} = [x_{j,i}, x_{j,i+1}]$$

$$\psi_j(x) = \sup_{y\in I_{j,i}} f(y) \ \forall i \in \{1, \dots, N_j\}, x \in I_{j,i} = [x_{j,i}, x_{j,i+1}]$$

Die Funktionen ψ_j, φ_j sind Treppenfunktionen, und konvergieren für $j \to \infty$ punktweise λ^1-f.ü. gegen f; damit ist f λ^1-messbar, und es gilt nach dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz:

$$\int_I \psi(x) \; \mathrm{d}x \xrightarrow{j\to\infty} \int_I f \; \mathrm{d}\lambda^1 \text{ und } \int_I \varphi_j(x) \; \mathrm{d}x = \int_I f \; \mathrm{d}\lambda^1$$

Damit ist f Riemann-integrierbar mit Integral $\int_I f \; \mathrm{d}\lambda^1$. □

Lemma 2.2.7 (Stetigkeit von Parameterabhängigen Integralen)**.** *Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Es existiert eine Nullmenge $N \subset X$, sodass $\forall x \in X \setminus N$ die Funktion $f(\cdot, x) : U \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(ii) $\forall y \in U$ ist die Funktion $f(y, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ μ-messbar.

(iii) $\exists g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, sodass $\forall y \in U$ und μ-fast-alle $x \in X$ gilt:

$$|f(x, y)| \leq g(x)$$

Dann ist die Funktion

$$\varphi : U \to \mathbb{R}, \varphi(y) = \int_X f(y, x) \; \mathrm{d}\mu$$

stetig auf U.

Beweis. Wir zeigen, dass φ Folgenstetig ist. Sei also $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U mit $y_j \xrightarrow{j\to\infty} y \in U$. Die Funktionenfolge $f_k := f(y_k, \cdot)$ konvergiert nach (i) μ-f.ü. gegen $f(y, \cdot)$. Ferner gilt nach (iii)

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \leq g(x)$$

mit der Funktion $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ $\forall x \in X \setminus N$. Damit folgt mit Satz 2.2.4:

$$\varphi(y) = \lim_{k\to\infty} \int_X f(y_k, x) \; \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \varphi(y_k)$$

Damit ist φ stetig. □

Satz 2.2.8 (Differentiation unter dem Integral)**.** *Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Es existiert eine Nullmenge $N \subset X$, sodass $\forall x \in X \setminus N$ die Funktion $f(\cdot, x)$ stetig differenzierbar auf U ist.

(ii) $\forall y \in U$ ist die Funktion $f(y, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ μ-messbar.

(iii) $\exists g \in \mathscr{L}^1(\mu)$*, sodass* $\forall y \in U$ *und* μ*-fast-alle* $x \in X$ *gilt:*

$$|\partial_i f(y,x)| \leq g(x)\ \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

Dann ist die Funktion

$$\varphi : U \to \mathbb{R}, \varphi(y) = \int_X f(y,x)\ \mathrm{d}\mu$$

stetig differenzierbar auf U*, und es gilt:*

$$\partial_i \varphi(y) = \int_X \partial_i f(y,x)\ \mathrm{d}\mu\ \forall i \in \{1,\dots,n\}, y \in U$$

Beweis. Wir wenden Lemma 2.2.7 auf den Differenzenquotienten an:

$$\frac{\varphi(y+he_i)-\varphi(y)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left(\int_X f(y+he_i,x) - f(y,x)\ \mathrm{d}\mu \right)$$

□

2.3 L^p-Räume

Definition 2.3.1. *Sei* $p \in [1,\infty)$*. Dann bezeichnen mit* $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ *die Menge aller* μ*-messbaren Funktionen* f *mit*

$$\int_X |f|^p\ \mathrm{d}\mu < \infty$$

Die Größe

$$||f||_p = ||f||_{\mathcal{L}^p(X)} = \left(\int_X |f|^p\ \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

heißt *L^p-Norm von f*. *Mit* $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ *bezeichnen wir die Menge aller* μ*-messbaren Funktionen* f*, für die ein* $K \in \mathbb{R}$ *mit* $|f| \leq K$ μ*-f.ü. existiert. Die Größe*

$$||f||_\infty = ||f||_{\mathcal{L}^\infty(X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf\{s > 0 \mid \mu(|f| > s) = 0\}$$

heißt *$\mathcal{L}^\infty$-Norm von f*.

Bemerkung. *Der Operator* ess sup *bezeichnet das* *wesentliche Supremum* *einer Funktion. Dabei handelt es sich um die kleinste Schranke, sodass* μ*-fast-alle Funktionswerte von* f *unterhalb dieser Schranke liegen. Analog wird das* *wesentliche Infimum*, *bezeichnet mit* ess inf*, definiert.*

Lemma 2.3.2 (Young-Ungleichung)**.** *Seien* $p, q \in (1,\infty)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Dann gilt*

$\forall a, b \geq 0$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Beweis. Wir nutzen die Tatsache, dass die Funktion ln konkav ist, d.h. dass $\forall x, y \in (0, \infty)$, $\alpha \in [0,1]$ gilt:

$$\ln(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Wenden wir diese Eigenschaft mit $x = a^p$, $y = b^q$ und $\alpha = \frac{1}{p}$ an (n.b.: damit ist $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \alpha$), so erhalten wir:

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$$

Dank der Monotonie von ln folgt die Behauptung. □

Lemma 2.3.3 (Hölder-Ungleichung)**.** *Seien $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$ für $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (wobei wir die Konvention $\frac{1}{1} + \frac{1}{\infty} = 1$ verwenden). Dann ist $f \cdot g \in \mathscr{L}^1$, und es gilt:*

$$\left|\int_X fg \, \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 2.3.4. *Sei $p \in [1, \infty]$. Dann gilt:*

(*i*) $||f||_p = 0 \implies f = 0$ *μ-f.ü.*

(*ii*) $f \in \mathcal{L}^p, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in \mathcal{L}^p, ||\lambda f||_p = |\lambda| \cdot ||f||_p$

(*iii*) *Minkowski-Ungleichung:* $f, g \in \mathcal{L}^p \implies f + g \in \mathcal{L}^p$*, und es gilt:*

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Beweis. Sei zunächst $p < \infty$.

(*i*) Es gilt:

$$||f||_p = 0 \implies \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu = 0 \xrightarrow{2.1.13} |f|^p = 0 \ \mu\text{-f.ü.} \implies f = 0 \ \mu\text{-f.ü.}$$

(*ii*) Folgt aus der Linearität des Integrals.

(*iii*) Folgt für $p = 1$ aus der Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$. Sei also $p \in (1, \infty)$. Mit der Konvexität von $t \mapsto t^p$ auf $[0, \infty)$ folgt damit:

$$|f+g|^p = 2^p \cdot \left|\frac{f+g}{2}\right|^p \leq 2^{p-1} \cdot (|f|^p + |g|^p)$$

Zur Erinnerung: eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 1]$ gilt:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Damit ist bereits $f + g \in \mathcal{L}^p$. Sei $q := \frac{p}{p-1}$ (n.b.: dieses q wird so gewählt, damit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist; es wird daher auch oft mi p' bezeichnet). Damit gilt nach der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned}\int_X \overbrace{|f|}^{\in \mathcal{L}^p} \cdot \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\in \mathcal{L}^q \text{ da } f+g \in \mathcal{L}^p} \,\mathrm{d}\mu &\leq \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X \underbrace{\left||f+g|^{p-1}\right|^q}_{=|f+g|^{(p-1)\cdot q}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} \\ &= ||f||_p \cdot ||f+g||_p^{p-1}\end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \leq ||g||_p \cdot ||f+g||_p^{p-1}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}||f+g||_p^p &= \int_X \underbrace{|f+g|^p}_{\substack{=|f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \\ \leq (|f|+|g|) \cdot |f+g|^{p-1}}} \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq (||f||_p + ||g||_p) \cdot ||f+g||_p^{p-1}\end{aligned}$$

$$\implies ||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Nun zeigen wir die Aussagen für $p = \infty$.

(*i*) Klar.

(*ii*) Für $\lambda = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $\lambda \neq 0$. Dann gilt:

$$\mu(\{|\lambda f| > |\lambda| \cdot ||f||_\infty\}) = \mu(\{|f| > ||f||_\infty\}) = 0$$

Folglich ist $||\lambda f||_\infty \leq |\lambda| \cdot ||f||_\infty$. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\mu\left(\left\{|f| > \frac{1}{|\lambda|} \cdot ||\lambda f||_\infty\right\}\right) &= \mu\left(\left\{\left|\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda f\right| > \left|\frac{1}{\lambda}\right| \cdot ||\lambda f||_\infty\right\}\right) \\ &= \mu\left(\{|\lambda f| > ||\lambda f||_\infty\}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \ ||f||_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot ||\lambda f||_\infty$$

Also gilt auch $||\lambda f||_\infty \geq |\lambda| \cdot ||f||_\infty$.

(iii) Sei $|f| \leq s$, $|g| \leq t$ jeweils μ-f.ü.; dann ist $|f+g| \leq s+t$ μ-f.ü., und es folgt die Behauptung.

$\square$

Bemerkung. *Damit ist* $||\cdot||_p$ *eine Semi-Norm auf* $\mathcal{L}^p$ *(da sie nur positiv semidefinit ist, denn nicht nur die Nullfunktion hat bzgl. ihr Norm 0). Wir bilden also die Restklassen der Äquivalenzrelation*

$$f \sim g :\Longleftrightarrow \ g = f \ \mu\text{-f.ü.},$$

welche offensichtlich eine Äquivalenzrelation ist:

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p \mid g = f \ \mu\text{-f.ü.}\}$$

Den Restklassenraum bezeichnen wir mit $L^p = L^p(X, \mathscr{A}, \mu) = \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^p\}$. *Mit den Operationen* $[f] + [g] := [f+g]$, $\alpha[f] := [\alpha f]$ *und der Norm* $||[f]||_p := ||f||_p$ *wird daraus ein normierter Vektorraum. All diese Operationen sind unabhängig von der Wahl des Repräsentanten der Äquivalenzklasse, und damit wohldefiniert.*

Definition 2.3.5. *Sei* $p \in [1, \infty]$. *Der lineare Raum* $L^p = L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ *besteht aus den Restklassen* $[f]$ *aller* μ*-messbaren Funktionen* f *mit* $||f||_p < \infty$. *Er wird mit der Norm* $||[f]||_p$ *versehen.*

Bemerkung. *Wir unterscheiden weiterhin zwischen* f *und* $[f]$. *Man bezeichnet die Restklassen* $[f]$ *allerdings auch gerne als Funktionen, und schreibt z.B.* $f \in L^p$ *statt* $[f] \in L^p$, *da es sich bei diesen Restklassen ja prinzipiell um eine Funktion modulo einer Veränderung auf Nullmengen handelt.*

Definition 2.3.6. *Sei* $E \in \mathscr{A}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine Funktion und* $f_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *die Fortsetzung von* f, *d.h.* $f_0(x) = f(x) \ \forall x \in E$ *und* $f_0(x) = 0 \ \forall x \in X \setminus E$. *Dann setzen wir:*

$$\mathcal{L}^p(E) = \mathcal{L}^p(E, \mu) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}} \mid f_0 \in \mathcal{L}^p(X)\}$$

und

$$L^p(E,\mu) = \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^p(E,\mu)\}.$$

Dann ist durch

$$||[f]||_{L^p(E)} := ||[f_0]||_{L^p(X)}$$

Lemma 2.3.7. *Sei $p \in [1,\infty)$ und $f_k = \sum_{j=1}^k u_j$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, wobei $u_j \in L^p \; \forall j \in \mathbb{N}$. Falls*

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||u_j||_p < \infty$$

ist, so gilt:

(*i*) *Der Limes $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existiert für μ-fast alle $x \in X$.*

(*ii*) *Es gilt $f \in L^p$.*

(*iii*) *Es gilt $||f - f_k||_p \xrightarrow{k\to\infty} 0$.*

Beweis. Sei $D \in \mathscr{A}$ der Schnitt der Definitionsgebiete der Funktionen $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Wir definieren:

$$g_k(x) = \sum_{j=1}^{k} |a_j(x)|, \; g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |u_j(x)| \quad \forall x \in D$$

Dabei existiert der Limes der Reihe immer, da alle Summanden positiv sind; er ist nur ggf. ∞. Es gilt $g_k \leq g_{k+1} \; \forall k \in \mathbb{N}$, also gilt $g_k(x) \nearrow g(x)$ sowie $|g_k(x)|^p \nearrow |g(x)|^p \; \forall x \in D$ (jeweils für $k \to \infty$). Die Funktionen g und g_k sind als Summen von Elementen aus L^p μ-messbar. Dank der Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto t^{1/p}$ folgt damit:

$$||g||_p \overset{2.1.6}{=\!=} \lim_{k\to\infty} ||g_k||_p \overset{\substack{\text{Minkowski-Ungleichung} \\ \downarrow}}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} ||u_j||_p < \infty$$

Dank Folgerung 2.1.12 gilt damit $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j(x)| = g(x) < \infty$ für μ-fast alle $x \in X$. Für diese x existiert damit auch der Limes $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$, denn wenn eine Reihe absolut konvergiert, so konvergiert sie auch im klassischen Sinne. Wir wissen ferner, dass die Funktionen f_k als Summen μ-messbarer Funktionen selbst μ-messbar sind, also gilt $|f_k|^p \leq g^p \in L^1$, sowie (analog zum Beweis von Satz 2.3.4 (*ii*)):

$$|f - f_k|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |f_k|^p) \leq 2^p g^p$$

Mit dem Satz der majorisierten Konvergenz folgt damit $f \in L^p$ und $||f - f_k||_p \xrightarrow{k\to\infty} 0$. □

Satz 2.3.8 (Fischer-Riesz)**.** *Für jedes* $p \in [1, \infty]$ *ist* $(L^p, ||\cdot||_p)$ *ein Banachraum (i.e. ein vollständiger, normierter Raum).*

Beweis. Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bzgl. $||\cdot||_p$. Es genügt, eine konvergente Teilfolge dieser Folge zu finden. Wir betrachten zunächst den Fall $p < \infty$, und können (nach Wahl einer Teilfolge) annehmen, dass $||f_{k+1} - f_k||_p \leq 2^{-k}\ \forall k \in \mathbb{N}$ ist. Wir setzen $f_0 = 0$; dann gilt mit dem Teleskopsummenargument $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} u_j \text{ mit } u_j := f_j - f_{j-1}\ \forall j \in \mathbb{N}$$

Die Folge der Normen $(||u_j||_p)_{j\in\mathbb{N}}$ ist wegen $||u_j||_p = ||f_j - f_{j-1}||_p \leq 2^{-j-1}$ beschränkt durch die Konvergente geometrische Folge $(2^{-j-1})_{j\in\mathbb{N}}$; damit können wir Lemma 2.3.7 anwenden, und erhalten, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μ-f.ü. gegen eine Funktion $f \in L^p$ konvergiert.

Für $p = \infty$ bemerken wir:

$$\Big|\, ||f_k||_\infty - ||f_l||_\infty \,\Big| \leq ||f_k - f_l||_p\ \ \forall k, l \in \mathbb{N}$$

Damit existiert der Limes $\lim_{k\to\infty} ||f_k||_\infty$ (da $||f_k - f_l||_p \xrightarrow{k,l\to\infty} 0$, denn $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge). Die Mengen

$$N_k := \{x \mid |f_k(x)| > ||f_k||_\infty\},\ \ k \in \mathbb{N}$$

$$N_{k,l} := \{x \mid |f_k(x) - f_l(x)| > ||f_k - f_l||_\infty\},\ \ k, l \in \mathbb{N}$$

sind Nullmengen, also ist auch

$$N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} N_{k,l}$$

eine Nullmenge. Für jedes $x \in X \setminus N$ gilt

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq ||f_k - f_l||_\infty < \varepsilon$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$, für hinreichend große $k, l \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge der Beträge $(|f_k(x)|)_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in X \setminus N$ eine Cauchyfolge, d.h. f_k konvergiert auf $X \setminus N$ punktweise gegen eine Funktion f. Für jedes $x \in X \setminus N$ gilt ferner:

$$|f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_k(x)| \leq \lim_{k\to\infty} ||f_k||_\infty$$

und, dank der Stetigkeit der Betragsfunktion:

$$|f_k(x) - f(x)| = \lim_{l \to \infty} |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$, für hinreichend große $k \in \mathbb{N}$. Damit folgt aber:

$$||f||_\infty \leq \lim_{k \to \infty} ||f_k||_\infty < \infty \text{ und } ||f_k - f||_\infty \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$\square$

Folgerung 2.3.9. *Gilt $f_k \xrightarrow{k \to \infty} f$ in L^p für ein $p \in [1, \infty]$, so konvergiert eine Teilfolge $(f_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise μ-f.ü. gegen f.*

Beweis. Folgt sofort aus Satz 2.3.8. $\square$

Bemerkung. *Es ist hier notwendig, zu spezifizieren, dass nur eine Teilfolge von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Betrachte beispielsweise die Folge von Intervallen (bzw. von endlichen Vereinigungen von Intervallen) $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $I_1 = [0, 1/2]$, sodass die Größe der Intervalle in jedem Schritt leicht verringert wird, dass der Anfang von I_n immer genau das Ende von I_{n-1} ist, und dass jedes Intervall ggf. bei 1 abgeschnitten wird, und vom Punkt 0 an weitergeht. Dann konvergiert die Folge der Funktion $f_k := \chi_{I_k}$ nicht insgesamt, aber besitzt dennoch eine konvergente Teilfolge.*